

Lund 1973

UTJÄMNING AV DATAKANALER MED
HJÄLP AV ADAPTIVT SIGNAL-
ANPASSAT FILTER

TOMMY SVENSSON

UTJÄMNING AV DATAKANALER MED
HJÄLP AV ADAPTIVT SIGNAL-
ANPASSAT FILTER.

TOMMY SVENSSON



UTJÄMNING AV DATAKANALER MED HJÄLP AV ADAPTIVT SIGNALANPASSAT FILTER.

av

Tommy Svensson

Institutionen för Teletransmissionsteori, Tekniska Högskolan i Lund

Sammanfattning.

Transmission av digital information sker för närvarande huvudsakligen via telefonnätet. Då behovet av att överföra stora datamängder ständigt ökar är det av stor vikt att transmissionsmediet utnyttjas så effektivt som möjligt. Möjligheten att helt utnyttja kanalernas bandbredd begränsas starkt av att kanalernas amplitud- och faskarakteristik skiljer sig från de ideala. Detta har till följd att de spänningspulser, som representerar informationen, breddas så att närliggande symboler interfererar. En begränsande faktor på överföringshastigheten är också de störningar i form av termiskt brus och oönskade impulser som på kanalen adderas till datasignalen.

För datatransmission på kanaler störda av additivt vitt brus kan man visa [1] att den optimala linjära mottagaren består av en kaskadkoppling av ett signalanpassat filter och ett tidsdiskret filter. Det signalanpassade filtret maximerar signal-brusförhållandet på dess utgång och eliminerar faskdistorsionen. Inverkan av den resterande amplituddistorsionen minimeras i det tidsdiskreta filtret.

Eftersom de önskade överföringsfunktionerna för det signalanpassade filtret och utjämnaren är beroende på vilken kanal, som är tillgänglig, bör lämpligen båda vara inställningsbara. Då kanalens karakteristik kan variera under en uppkoppling bör dessa inställningar ske automatiskt. Många forskare har arbetat med automatiska tidsdiskreta utjämnare [2] - [4]. I denna avhandling presenteras ett automatiskt inställningsbart signalanpassat filter.

Avhandlingen består av tre delar:

- I An Adaptive Matched filter.
- II The Influence of a Matched Filter on the Equalization of Data Channels.
- III Realisering av en Adaptiv Mottagare för Datatransmission.
(Medförfattare: Göran Salomonsson)

Realiseringen av det signalanpassade filtret presenteras i del I. Strukturen utgöres av ett s.k. ortonormalt filter, dvs ett filter där ingående delnät har ortonormala impulssvar. Filtret kan justeras dels med hjälp av testpulser, dels adaptivt under dataöverföringen. Resultat från simuleringar av filtret presenteras också i denna del.

I del II görs en jämförelse mellan utjämnare med och utan signalanpassade filter. Simuleringar har visat, att det signalanpassade filtret kan medföra en snabbare konvergens hos utjämnaren och lägre

restdistorsion med färre antal variabla parametrar.

Ett experimentellt system för mottagning av datasignaler och mätningar på detta system presenteras i del III. I denna del genomförs också brusanalys av det signalanpassade filtret.

Jag vill framföra min tacksamhet till min vetenskaplige handledare professor Göran Einarsson, som med stort intresse stött mitt arbete.

Jag känner en djup tacksamhet mot Göran Salomonsson, som varit mig till ovärderlig hjälp genom dagligt samarbete i mer än fyra år.

Personalen på Institutionen för Teletransmissionsteori tackas för det intresse och den hjälpsamhet som visats mig och mitt projekt.

Projektet har kunnat genomföras tack vare ekonomiskt stöd från Styrelsen för Teknisk Utveckling.

Summary

When the switched telephone network is used for data transmission the information rate is limited by the noise and the non-ideal amplitude and phase characteristics of the available channel. It is known that the optimum linear receiver for data transmission in additive white noise consists of a cascade of a matched filter and a time-discrete filter. This thesis deals primarily with the matched filter. It is shown that such a filter can be constructed as an orthonormal filter, i.e. a filter consisting of a number of outputs with orthonormal impulse responses. The filter can be pre-set by test pulses and adaptively adjusted during the transmission of data. Simulations of the matched filter are presented, and the results show that the inclusion of the matched filter in the receiver can give rise to faster convergence of the equalizer and less residual distortion with fewer adjustable parameters. An experimental receiver consisting of an orthonormal filter and a recursive equalizer and measurements on this receiver are presented. Finally, it is shown how external noise will affect the adjustment of the orthonormal filter.

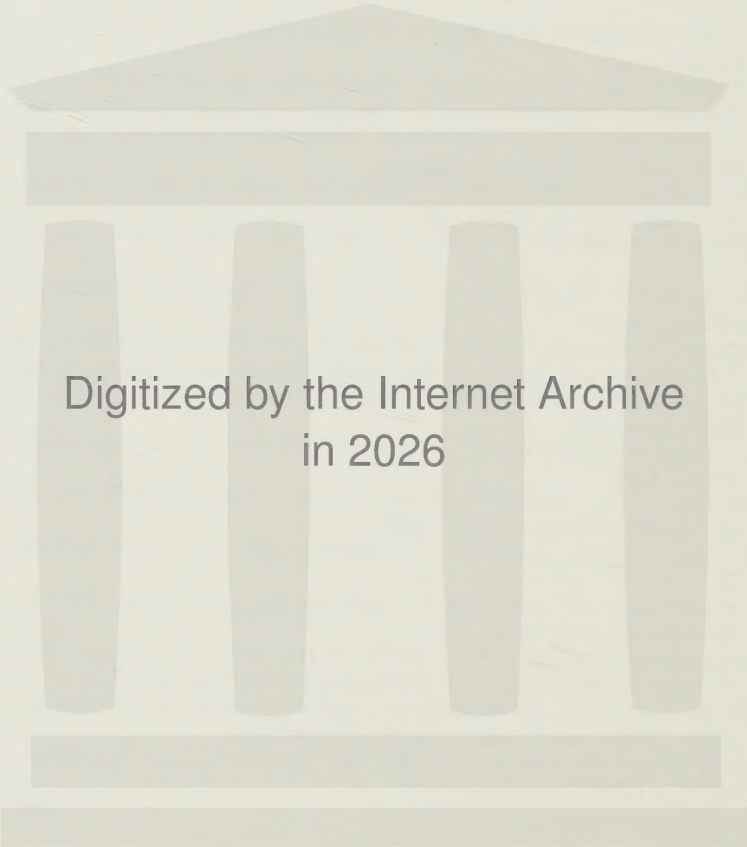
Referenser

- [1] Lucky, R.W., Salz, J.R. & Weldon, E.J.
"Principles of Data Communication".
New York 1968

- [2] Lucky, R.W.
"Automatic Equalization for Digital Communication".
Bell System Technical Journal
44 (1965):4, pp 547 - 588

- [3] DiToro, M.J.
"Communication in Time-Frequency Spread Media Using Adaptive
Equalization".
Proc. IEEE
56 (1968):10, pp 1653 - 1679

- [4] Hirsch, D. and Wolf, W.J.
"A simple Equalizer for Efficient Data Transmission".
IEEE Trans. on Communication Technology
COM-18 (1970):1, pp 5 - 11



Digitized by the Internet Archive
in 2026

An Adaptive Matched Filter

By

TOMMY SVENSSON*

UDC 621.372.54
LME 7443

The optimum receiver for data transmission requires a filter matched to the received signals. When the characteristics of the channel are not completely known at the receiver it may be advantageous to use a variable filter. This paper describes an adjustable filter with which a good match to a class of channels can be obtained. The filter is pre-set by test pulses and can be adaptively corrected during the transmission of data. A slightly different adjustment of the filter, resulting in minimum difference between the obtained and the desired output in the mean square sense, is also presented.

* Telecommunication Theory, Electrical Engineering Department, The Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.

Un filtre à adaptation variable

Le récepteur optimal pour la transmission de données exige un filtre adapté aux signaux reçus. Lorsque les caractéristiques de la voie ne sont pas entièrement définies à l'extrémité réceptrice, il peut être avantageux d'utiliser un filtre réglable. L'auteur décrit un tel filtre, permettant d'obtenir une bonne adaptation pour une catégorie définie de voies. Le filtre est pré-réglé par des impulsions de test et son adaptation peut être corrigée durant la transmission des données. Un réglage de filtre légèrement différent, entraînant un écart minimum entre les caractéristiques de sortie désirées et celles effectivement obtenues au sens quadratique moyen, est également présenté.

Un filtro ajustable de adaptación

El receptor óptimo para la transmisión de datos requiere un filtro adaptado a las señales de recepción. Cuando las características del canal no son completamente conocidas en el receptor, puede resultar ventajoso el empleo de un filtro variable. Este artículo describe un filtro ajustable con el cual puede obtenerse una buena adaptación a una clase de canales. El filtro está puesto a punto previamente por los impulsos de prueba y su adaptación puede ser corregida durante la transmisión de datos. También se presenta un ajuste ligeramente diferente del filtro, resultando en una diferencia mínima entre la salida obtenida y deseada del sentido cuadrático medio.

Ein adaptive angepasstes Filter

Ein optimaler Empfänger für Datenübertragung erfordert ein an die empfangenen Signale angepaßtes Filter. Falls die Parameter des benutzten Kanals nicht genau auf der Empfängerseite bekannt sind, kann es vorteilhaft sein, ein variables Filter zu benutzen. Diese Arbeit beschreibt ein justierbares Filter mit dem eine gute Anpassung an eine Klasse von Kanälen erzielt werden kann. Das Filter hat eine Grundeinstellung, die man durch Prüfpulse erreicht hat und es kann automatisch während der Übertragung von Daten korrigiert werden. Eine leicht abweichende Justierung des Filters, welche einen minimalen Unterschied zwischen den erhaltenen und den gewünschten Ausgangswerten im Hinblick auf mittlere Durchschnittswerte zur Folge hat, wird ebenfalls beschrieben.

Contents

	Page
CHAPTER 1 <i>Introduction</i>	I.4
CHAPTER 2 <i>Orthonormal Filters</i>	I.5
CHAPTER 3 <i>Adaptive Adjustments of the Matched Filter</i>	I.8
CHAPTER 4 <i>Adaptive Adjustments to Minimum Mean-Squared Error</i>	I.10
CHAPTER 5 <i>Computer Simulations</i>	I.12
5.1 Model	I.12
5.2 Coefficient Setting with Test Pulses	I.14
5.3 Adaptive Adjustments	I.19
ANNEX <i>Calculation of the Variance of Q_n</i>	I.21
REFERENCES	I.24

CHAPTER 1

Introduction

It is known⁷ that the optimum receiver for data transmission in additive white Gaussian noise consists of a matched filter followed by a periodic filter. When data is transmitted over a switched telephone network, the characteristics of the channel will depend on the connection available. Therefore it is convenient to let the receiving filters be variable in such a way that they automatically adapt themselves to the channel in question. In the literature there are many descriptions of adaptive periodic filters,^{5, 8, 9, 10, 13, 15}. In this paper a different approach, consisting of an adaptive matched filter, will be described.

In data systems commercially available today the receiver front end filter is usually fixed. Besides the fact that the signal-to-noise ratio will be maximized there are, however, further reasons for considering inclusion of an adaptive matched filter:

- The most harmful distortion is the phase distortion and a matched filter completely eliminates such distortion.
- A periodic filter in most cases requires an open binary eye for the adjustment algorithm to converge. By using a matched filter, the phase distortion will be eliminated and sufficient eye opening can be obtained.
- The quality of the equalized output from a periodic filter is strongly dependent on the choice of sampling instants. The output from a matched filter has a well defined maximum, which reduces this problem.

The filter considered in this paper consists of a network with one input and N outputs. The responses at the different outputs to a unit impulse $\delta(t)$ at the input are $\varphi_n(t)$ ($1 \leq n \leq N$). These signals, after having been weighted with coefficients C_n , are inputs to a summing amplifier (Fig. 1.1).

Thus the total impulse response of the network becomes

$$h(t) = \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(t) \quad (1.1)$$

It is possible to vary $h(t)$ by changing the coefficients C_n . The functions $\varphi_n(t)$ are to be chosen in such a manner that the network can be adjusted to match the incoming data pulses from different channels.

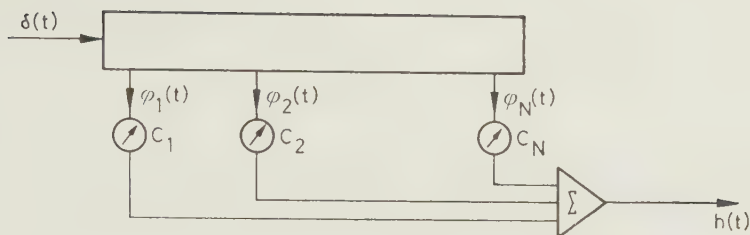


Fig. 1.1. The used filter structure.

CHAPTER 2

Orthonormal Filters

Let $\{\varphi_n(t)\}_1^\infty$ be a complete set of orthonormal functions in the interval $0 \leq t < \infty$, that is

$$\int_0^\infty \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (2.1)$$

Any function $h(t)$ with $h(t) = 0$ for $t < 0$ and with finite energy can then be written as an infinite sum

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(t) \quad (2.2)$$

The coefficients C_n are given by

$$C_n = \int_0^\infty h(t) \varphi_n(t) dt \quad (2.3)$$

One way to obtain a network with variable impulse response (1.1) is to let $\varphi_n(t)$ be orthonormal functions generated as impulse responses to linear filters. KAUTZ⁶ has given a solution to the problem of finding realizable filters with orthonormal impulse responses. The general form of the Laplace transforms to the responses of these filters is

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{2n-1}(s) &= \frac{\sqrt{2p_n q_n}}{s^2 + p_n s + q_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{s^2 - p_i s + q_i}{s^2 + p_i s + q_i} \\ \Phi_{2n}(s) &= \frac{\sqrt{2p_n} s}{s^2 + p_n s + q_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{s^2 - p_i s + q_i}{s^2 + p_i s + q_i} \end{aligned} \right\} n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

One possible way of realizing Eq. (2.4) is shown in Fig. 2.1.

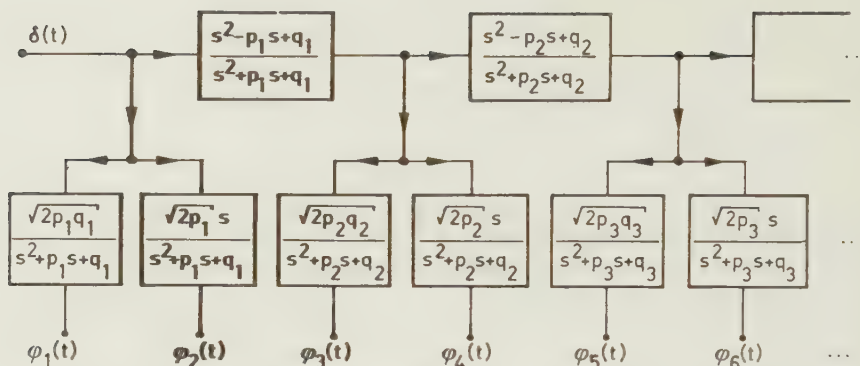


Fig. 2.1. Generation of orthonormal impulse responses.

We now turn to the main problem of this section, how to choose the coefficients C_n to get a **matched filter** when the input is a fixed signal $x(t)$.

We want the **impulse response** of the network to be

$$h(t) = x(T - t) \quad (2.5)$$

where T is a **properly chosen** constant. We get the coefficients C_n in the orthonormal expansion (2.2) from Eq. (2.3):

$$C_n = \int_0^{\infty} x(T - t) \varphi_n(t) dt \quad (2.6)$$

Now consider a network with the impulse response $\varphi_n(t)$. If the input signal is $x(t)$, we get the **output signal** $y_n(t)$ by convolution:

$$y_n(t) = x(t) * \varphi_n(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) \varphi_n(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

If $y_n(t)$ is **sampled at the time instant** $t = T$, we get equality between the right-hand sides of (2.6) and (2.7), that is

$$C_n = y_n(T) \quad (2.8)$$

By sending a **single test pulse** over the channel we can adjust the filter simply by measuring the signals $y_n(t)$ at the time instant T . If the channel is noisy, we send several **test pulses** and take averages of the outputs.

In practice we can only use a finite number of orthonormal functions. We are

therefore forced to truncate the sum (2.2). The quality of the approximation of (2.5) with the truncated sum

$$\hat{h}(t) = \sum_{n=1}^N C_n \varphi_n(t) \quad (2.9)$$

is dependent on the choice of the sampling point T and the set of coefficients $\{C_n\}$. To find the optimum $\hat{h}(t)$ with a fixed set of orthonormal base functions $\{\varphi_n(t)\}$ we minimize the quantity

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(T-t) - \hat{h}(t)]^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(T-t)^2 dt - 2 \sum_{n=1}^N C_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) x(T-t) dt + \sum_{n=1}^N C_n^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

with respect to T and $\{C_n\}$. When ε is minimum, the partial derivatives $\partial\varepsilon/\partial C_n$, where $1 \leq n \leq N$ have to be zero:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_n} = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) x(T-t) dt + 2C_n = 0$$

As $\varphi_n(t) = 0$ for $t < 0$ the solution becomes

$$C_n = \int_0^{\infty} x(T-t) \varphi_n(t) dt \quad (2.11)$$

i.e. the same result as in the case with infinite number of base functions.

Substituting (2.11) into (2.10) and letting E represent the energy of the signal $x(t)$ we get

$$\varepsilon = E - \sum_{n=1}^N C_n^2 \quad (2.12)$$

Since $\varepsilon > 0$ the minimum of ε with respect to T must occur when the sum $\sum_{n=1}^N C_n^2$ is maximum. According to (2.8) the sampling point should thus be chosen as the time when

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^N y_n(t)^2 \quad (2.13)$$

is maximum.

CHAPTER 3

Adaptive Adjustments of the Matched Filter

In the last chapter we got the coefficients of the matched filter by measuring the outputs of the filter when the input was a single test pulse $x(t)$. If the characteristics of the channel—and thereby $x(t)$ —change during the data transmission, the filter has to be adaptively adjustable.

We assume that the information of the data signal is represented by a discrete sequence with amplitude levels a_v (multilevel amplitude modulation). The levels are assumed to be statistically independent with zero mean

$$E\{a_\nu a_\mu\} = \begin{cases} \sigma_a^2 & \nu = \mu \\ 0 & \nu \neq \mu \end{cases} \quad (3.1)$$

The input signal to the filter is not in this case a single pulse $x(t)$, but a superposition of such pulses within a time separation of T_0 . (Data frequency $= 1/T_0$.)

$$X(t) = \sum_r a_r x(t - rT_0) \quad (3.2)$$

On the different outputs we consequently get

$$Y_n(t) = \sum_r a_r y_n(t - rT_0) \quad (3.3)$$

$y_n(t)$ are the responses when the input is $x(t)$ as in Chapter 2.

If we sample the signals in (3.3) at the time instants $t = \mu T_0 + T$ and multiply the sampled values by a_μ and average, we get

$$\begin{aligned} E\{a_\mu \cdot Y_n(\mu T_0 + T)\} &= E\left\{a_\mu \sum_r a_r y_n[(\mu - r)T_0 + T]\right\} = \\ &= \sum_\nu E\{a_\mu a_\nu\} y_n[(\mu - \nu)T_0 + T] = \sigma_a^2 \cdot y_n(T) \end{aligned} \quad (3.4)$$

By observing that the right-hand side in (3.4) is proportional to C_n , we conclude that the coefficient C_n can be adaptively adjusted by this method. The sequence $\{a_\nu\}$ must, however, be available at the receiver. When the system is pre-set by test pulses, the sequence—possibly after further equalization—can be reconstructed in a detector. The condition is that the input to the detector should have an open eye.

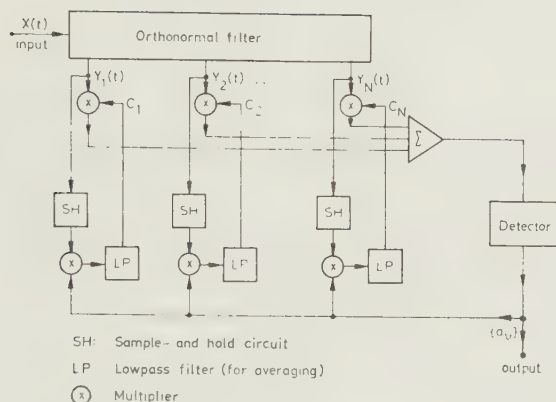


Fig. 3.1. Adaptive matched filter.

The adaptive adjustment of the matched filter can be realized as in Fig. 3.1.

In order to get an idea of how the time constant in the lowpass filters in Fig. 3.1 should be chosen, we calculate the variance of the expression

$$Q_n = \frac{1}{M} \sum_{\mu=-M_0}^{M_0+M} a_\mu [Y_n(\mu T_0 + T) + N_n(\mu T_0 + T)] \quad (3.5)$$

In this expression the ensemble average in (3.4) is replaced by the arithmetic average of M consecutive sample values. $N_n(\mu T_0 + T)$ are the sampled values of noise disturbance on the outputs of the filter. The noise is assumed to be white and gaussian on the input with spectral density R_0 .

After some calculations (presented in the Annex) we get

$$\begin{aligned} V\{Q_n\} &= E\{Q_n^2\} - E\{Q_n\}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{M} [(V\{a_\mu^2\} + 2E\{a_\mu^2\}^2 D_n) y_n(T)^2 + E\{a_\mu^2\}^2 R_0] \end{aligned} \quad (3.6)$$

D_n denotes the squared distortion at the n th output, that is

$$D_n = \frac{1}{y_n(T)^2} \sum_{v \neq 0} y_n(v T_0 + T)^2$$

From (3.6) we can calculate M (the time constant of the LP-filters) to obtain desirably small variance.

CHAPTER 4

Adaptive Adjustments to Minimum Mean-Squared Error

As mentioned in Chapter 1, an optimum receiver for data transmission should consist of a matched filter followed by a periodic filter. The matched filter reduces the noise and eliminates the phase-distortion, but causes some additional amplitude-distortion. If the periodic filter is missing, the "optimum" settings of the coefficients are not those earlier described. As a consequence of the structure of the filter, the outputs are linearly independent. This means that there is a unique set of coefficients $\{C_n\}$, which minimizes the difference between the received and a desired output in the mean-square sense.⁴ Thus we want to find the minimum of

$$D_{sq} = \sum_v [y(vT_0 + T) - d_v]^2 \quad (4.1)$$

$y(t)$ here denotes the total response of the filter, when the input is a single test pulse $x(t)$

$$y(t) = \sum_n C_n y_n(t) \quad (4.2)$$

d_v are the sampled values of the desired output.

Usually we take

$$d_v = \begin{cases} 1 & v = 0 \\ 0 & v \neq 0 \end{cases}$$

from which we get

$$D_{sq} = \sum_v \left[\sum_n C_n y_n(vT_0 + T) \right]^2 - 2 \sum_n C_n y_n(T) + 1 \quad (4.3)$$

In order to minimize D_{sq} , we need the derivatives of D_{sq} with respect to the coefficients

$$\frac{\partial D_{sq}}{\partial C_m} = 2 \left[\sum_n C_n \sum_v y_m(vT_0 + T) y_n(vT_0 + T) - y_m(T) \right] \quad (4.4)$$

If we set Eq. (4.4) equal to zero we get a system of linear equations, from which we can calculate the optimum coefficients. By using the gradient method¹² we can, however, adjust the coefficient adaptively during the data transmission. It can easily be shown that D_{sq} is a convex function of the coefficients, so that any minimum found by the gradient method must be the absolute minimum of D_{sq} .

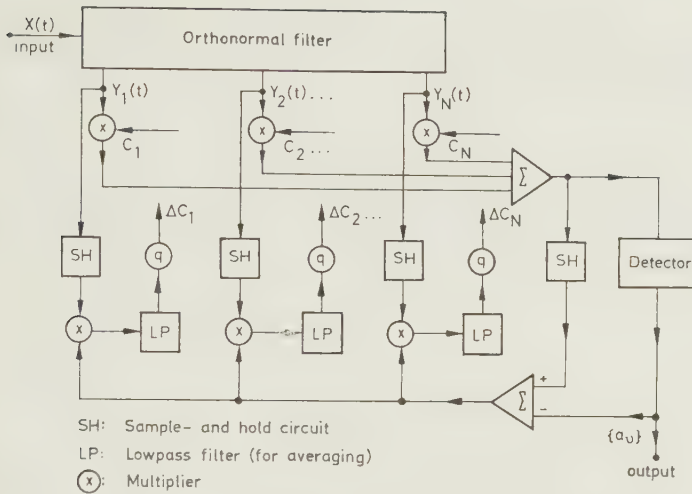


Fig. 4.1. Adaptive mean-square equalizer.

Consider Fig. 4.1 and assume that the filter is pre-set by test pulses to achieve an open eye. If sampling takes place at the time instants $t = \mu T_0 + T$, we get the following expression for the quantity ΔC_m

$$\Delta C_m = q \cdot E \left\{ Y_m(\mu T_0 + T) \left[\sum_n C_n Y_n(\mu T_0 + T) - a_\mu \right] \right\} \quad (4.5)$$

where q is a constant to be determined later. By using the relations (3.1) and (3.3) and the fact that the amplitude levels are statistically independent, we can rewrite Eq. (4.5)

$$\begin{aligned} \Delta C_m &= q \cdot E \left\{ \sum_v a_v y_m[(\mu - v)T_0 + T] \left[\sum_n C_n \sum_\varrho a_\varrho y_n[(\mu - \varrho)T_0 + T] - a_\mu \right] \right\} = \\ &= q \cdot \left[\sum_v \sum_n \sum_\varrho C_n y_m[(\mu - v)T_0 + T] y_n[(\mu - \varrho)T_0 + T] E\{a_v a_\varrho\} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_v y_m[(\mu - v)T_0 + T] E\{a_v a_\mu\} \right] = \\ &= q \cdot \sigma_a^2 \left[\sum_n C_n \sum_v y_m[(\mu - v)T_0 + T] y_n[(\mu - v)T_0 + T] - y_m(T) \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

In this equation we can replace $\mu - \nu$ by ν since these quantities can assume the same values. We then have

$$\Delta C_m = q \cdot \frac{\sigma_a^2}{2} \cdot \frac{\partial D_{sq}}{\partial C_m} \quad (4.7)$$

If, at suitable instants, we subtract ΔC_m from the value of the coefficient C_m we have the gradient method. The rate of convergence can be adjusted by the attenuator q .

CHAPTER 5

Computer Simulations

5.1. Model

The described filter has been simulated on a computer. We have assumed that the transmission is in the base band and that the channel has all-pass character. The received signals have the Laplace transforms

$$\angle_k(s) = \mathcal{J}'(s) \cdot \angle_k(s) \quad (5.1)$$

where $\mathcal{J}'(s)$ and $\angle_k(s)$ are the transfer functions of the transmitting filter and the used channel respectively. As transmitting filter we have used a 3rd degree Butterworth filter:

$$\mathcal{J}'(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (5.2)$$

The amplitude response of this filter is sketched in Fig. 5.1.



Fig. 5.1. Frequency response of the transmitted signal.

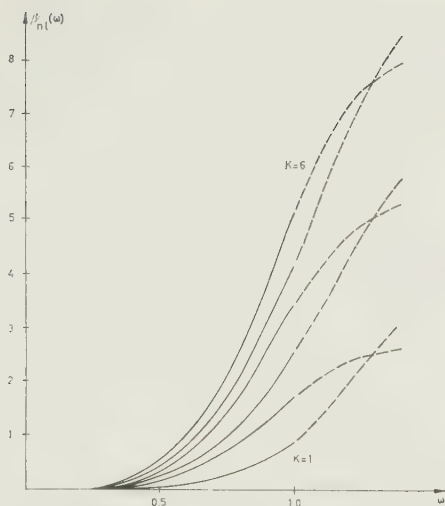


Fig. 5.2. Phase characteristics of the channels.

The transfer functions of the channels are dimensioned in such a way that their phase characteristics approximate $\beta_k(\omega) = k(a\omega + b\omega^3)$ within the pass band. Two different links have been used:

$$\left. \begin{aligned} k=1: \quad \angle_1(s) &= \frac{s^2 - 0.54s + 1.54}{s^2 + 0.54s + 1.54} \\ k=2: \quad \angle_2(s) &= \frac{s^2 - 0.71s + 1}{s^2 + 0.71s + 1} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

The channels used in the simulation are $\angle_1(s)$, $\angle_2(s)$, and such links are connected in cascade:

$$\angle_k(s) = \begin{cases} [\angle_2(s)]^{(k-1)/2} \cdot \angle_1(s) & k \text{ odd} \\ [\angle_2(s)]^{k/2} & k \text{ even} \end{cases} \quad (5.4)$$

It is only the non-linear part of the phase that causes distortion. For this part we have the expression

$$\beta_{nl}(\omega) = \beta(\omega) - \omega\beta'(0) - \beta(0) \quad (5.5)$$

$\beta_{nl}(\omega)$ is sketched in fig. 5.2 for the channels $\angle_k(s)$, $k=1-6$.

A filter, with structure as in *Fig. 2.1*, that can be matched to the received signals $x_k(t)$ (= outputs from the channels) when k assumes values between 1 and 6, was constructed. The main problem encountered was to find suitable pole locations for the filter. This was solved by using the following method:¹⁴

For each value of k we search for a function

$$h_k(t) = \sum_{i=1}^N A_{ik} e^{s_{ik}t} \quad \text{Re}\{s_{ik}\} < 0 \quad (5.6)$$

that minimizes

$$\int_0^\infty |h_k(t) - x_k(T_k - t)|^2 dt \quad (5.7)$$

with respect to A_{ik} and s_{ik} . T_k is chosen in such a way that $x_k(t)$ has the main part of its energy in the interval $(0, T_k)$. The obtained poles s_{ik} are inserted into a pole diagram and divided into groups with close located poles in the same group. Now the receiving filter ought to have at least one pole from each group. Groups in which each A_{ik} is small compared to those in other groups may be excluded. The number of poles in each group ought to be dependent on the values of the residues of the poles and on the distance between the poles.

With this method an orthonormal filter of degree eight was constructed. The poles were the following:

$$\left. \begin{aligned} s_{1,2} &= 0.20 \pm j \, 0.17 \\ s_{3,4} &= 0.25 \pm j \, 0.25 \\ s_{4,5} &= 0.26 \pm j \, 0.75 \\ s_{7,8} &= 0.10 \pm j \, 1.44 \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

5.2. Coefficient Setting with Test Pulses

As a result of the all-pass characteristics of the channels, all the received signals $x_k(t)$ will have the same amplitude spectrum. The output from an ideal matched filter will therefore be the same for all the k -values. The ideal matched output to our signals is shown in *Fig. 5.3*.

The received signals $x_k(t)$, where $0 \leq k \leq 6$, and the outputs $u_k(t)$ from an orthonormal filter adjusted in accordance with (2.8) with poles as in (5.8) will be found in *Figs. 5.4—5.10*. It can be seen that the outputs from the filter agree rather well with the ideal matched signal in *Fig. 5.3*.

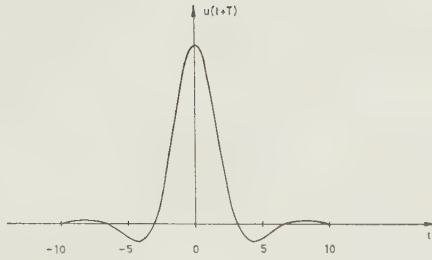


Fig. 5.3. Output from an ideal matched filter.

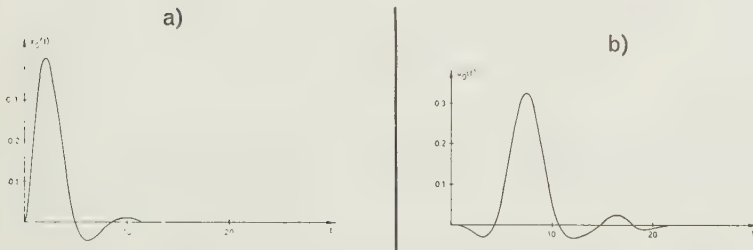


Fig. 5.4. Signals a) before and b) after the orthonormal filter; no channel.

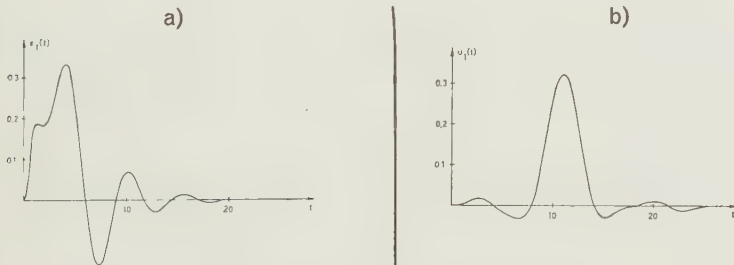


Fig. 5.5. Signals a) before and b) after the orthonormal filter; channel 1.

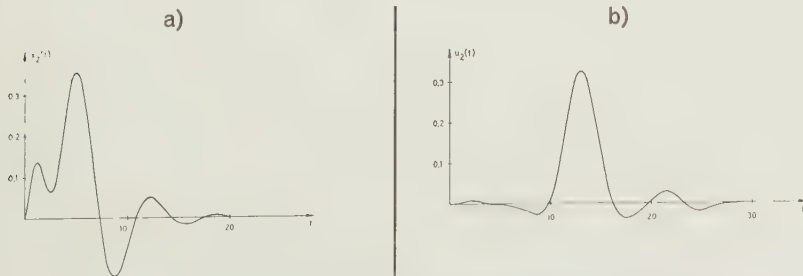


Fig. 5.6. Signals a) before and b) after the orthonormal filter; channel 2.

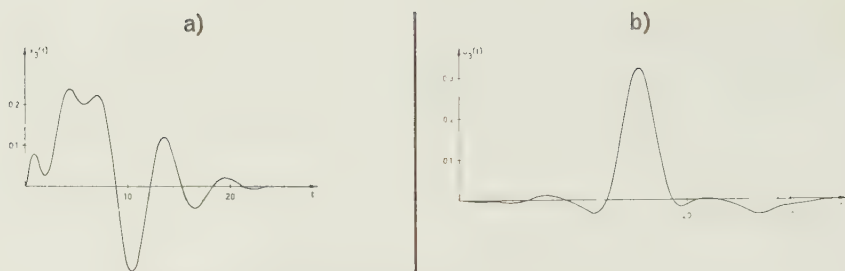


Fig. 5.7. Signals a) before and b) after the orthonormal filter; channel 3.

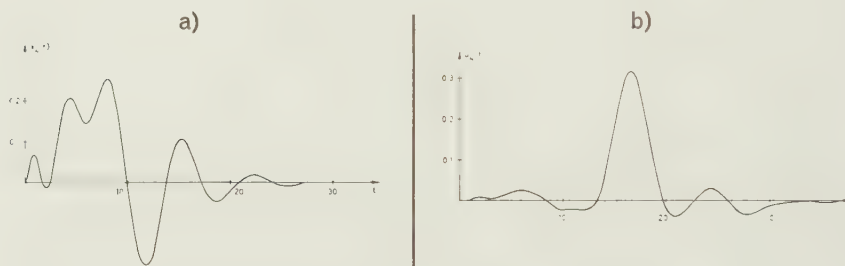


Fig. 5.8. Signals a) before and b) after the orthonormal filter; channel 4.



Fig. 5.9. Signals a) before and b) after the orthonormal filter; channel 5.

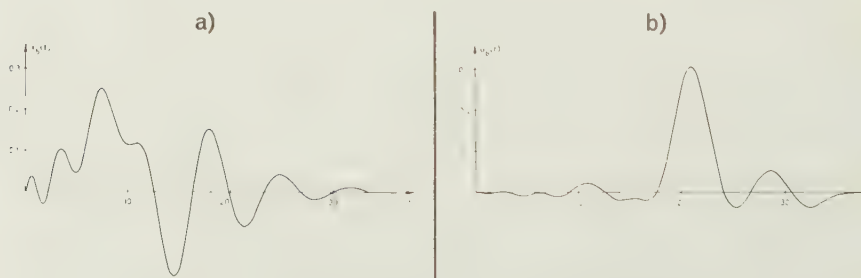


Fig. 5.10. Signals a) before and b) after the orthonormal filter; channel 6.

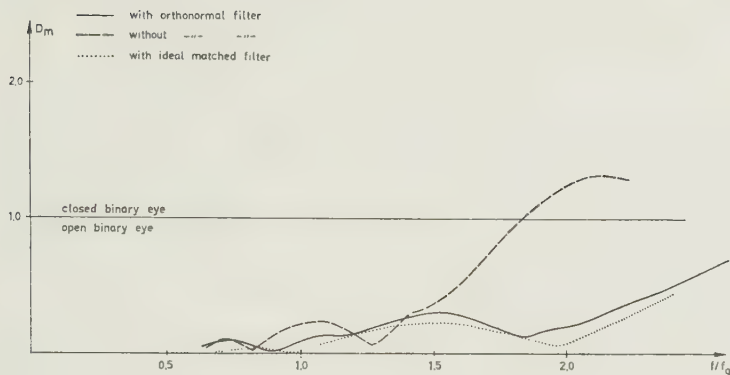


Fig. 5.11. Maximum distortions for channel 1.

As a criterion of the goodness of phase equalization we have chosen to measure the maximum distortion before and after the orthonormal filter. The maximum distortion of a signal $z(t)$ is defined as

$$D_m = \frac{1}{|z(T)|} \sum_{\mu \neq 0} |z(T + \frac{\mu}{f})| \quad (5.9)$$

where T is the time instant when $|z(t)|$ is maximum and f is the data frequency. In Figs. 5.11 and 5.12 these distortions as functions of the data rate can be found

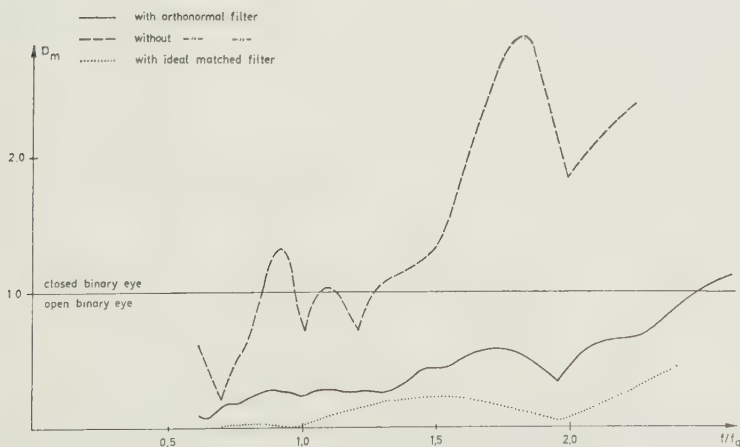


Fig. 5.12. Maximum distortions for channel 6.

when $k = 1$ and $k = 6$ respectively. We observe that we have succeeded in opening the binary eye also when the distortion of the input is very heavy. Further equalization could therefore easily be obtained with a periodic filter.

At the setting of the coefficients we have sampled the outputs at the time instant when the quantity $\xi(t)$ is maximum in accordance with Eq. (2.13). In practice it may be difficult to determine T accurately from this equation. $\xi(t)$ has been calculated for the different values of k and is sketched in Fig. 5.13 for $k = 6$. In all cases $\xi(t)$ had a flat maximum. As the value of $\xi(T)$ in accordance with (2.13) is a measure of goodness of the choice of T , we can therefore draw the conclusion that the value of T is not very critical.

As the final equalization is most often made with a periodic filter, it would be of interest to compare the described filter with a transversal filter adjusted to match the incoming signal. We have therefore also made computations on such a filter. The input was sampled at the time instants $t_0 + \mu T_0$, where $1/T_0 =$ the data rate $= 2f_g$ (twice the bandwidth). After that we have set the coefficients of the transversal filter to get the transfer function

$$\mathcal{H}_T(s) = \sum_{\mu=0}^N x(t_0 + \mu T_0) e^{-s(N-\mu)T_0} \quad (5.9)$$

The maximum distortion of the output has been computed and can be studied as a function of t_0 for $k = 1$ and $k = 6$ in Figs. 5.14 and 5.15.

The value of N has been taken as 7 in order to get the same number of parameters as in the case with orthonormal filter. We observe that the choice of t_0 is very critical—a bad choice of t_0 may cause closing of the binary eye. We do not have this disadvantage when we use the orthonormal filter. Fig. 5.13 showed that the sample time instant T , in the case with orthonormal filter, is not very critical.



Fig. 5.13. $\xi(t)$ when channel 6 is used.

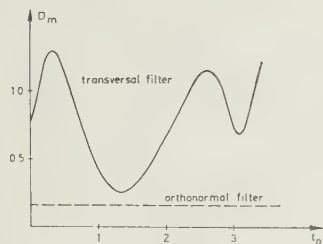


Fig. 5.14. Maximum distortions after the orthonormal filter and a "matched" transversal filter; channel 1.

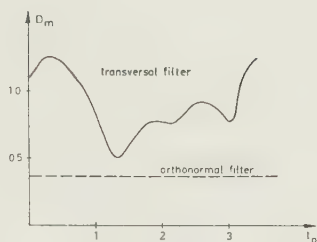


Fig. 5.15. Maximum distortions after the orthonormal filter and a "matched" transversal filter; channel 6.

5.3. Adaptive Adjustments

The systems in *Figs. 3.1* and *4.1* have been simulated on a computer. The received signals were noise-free and caused by random data. The data speed was twice the bandwidth. The lowpass filters in the figures were replaced by ideal averaging circuits. The system is assumed to be pre-set by test pulses.

The adaptive setting to matched filter was tested by changing the four most insignificant coefficients to zero before the adaptation was started. *Fig. 5.16* shows how the maximum distortion changes as a function of the number of data pulses when the channel with $k=4$ was used. The "time constant" M was equal to 2000 and we can see that the distortion is stabilized about the value obtained by test pulses after 2000 pulses.

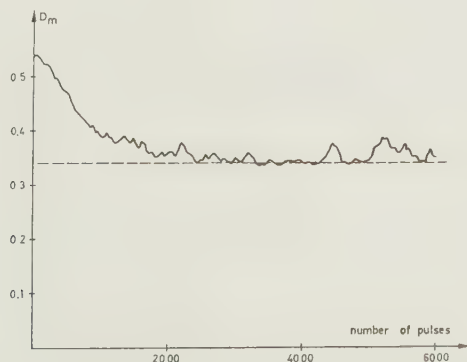


Fig. 5.16. Adaptation to matched filter. The maximum distortion as a function of the number of pulses, $k=4$.

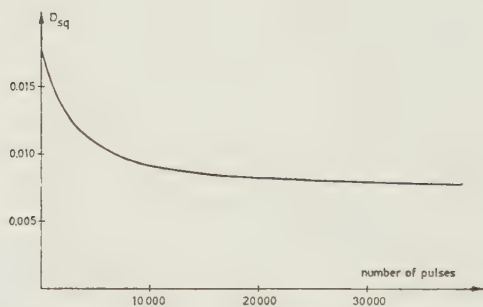


Fig. 5.17. Adaptation to minimum mean squared error. The squared distortion as a function of the number of pulses, $k=4$.

When the adaptation to minimum mean-squared error was simulated, the “time constant” M was 1000 pulses and the value of the attenuator q was 5.

In Fig. 5.17 we can see how the squared distortion decreases with the number of data pulses and Fig. 5.18 shows the output with markings at the data intervals. The system converges very slowly, owing to the fact that the averaging circuit needs M pulses for every change of the coefficients. It seems to be better to use a modified method where the coefficients are changed after every incoming data pulse. The average should then be taken over the M last pulses. Though this average is not proportional to the real gradient, it gives information about the behaviour of the gradient. The convergence with this method can be studied in Fig. 5.19. Here we used a “time constant” of 100 pulses and a q -value of 0.1. If we use a large time constant the value of q has to be very small. Otherwise the squared distortion will oscillate around the minimum as a consequence of the strong influence of the earlier gradients. On the other hand we cannot make the

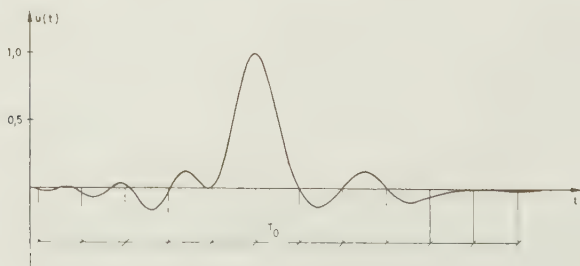


Fig. 5.18. Output after adaptation to minimum mean squared error.



Fig. 5.19. Adaptation to minimum mean squared error, modified method. The squared distortion as a function of the number of pulses, $k=4$.

time constant too small. The variance of the coefficient adjustments will then affect the result and we can reach the minima only if the q -value is very small, which means a slow convergence.

ANNEX

Calculation of the variance of Q_n

Substituting (3.3) into (3.5) we have

$$Q_n = \frac{1}{M} \sum_{\mu=M_0}^{M_0+M} a_{\mu} \left\{ \sum_{\nu} a_{\nu} y_n [(\mu - \nu)T_0 + T] + N_n [\mu T_0 + T] \right\} \quad (\text{A } 1)$$

The variance of Q_n is calculated from

$$V\{Q_n\} = E\{Q_n^2\} - E\{Q_n\}^2 \quad (\text{A } 2)$$

At first we calculate the average of Q_n

$$\begin{aligned} E\{Q_n\} &= \frac{1}{M} \left[\sum_{\mu} \sum_{\nu} E\{a_{\mu} a_{\nu}\} y_n [(\mu - \nu)T_0 + T] + \sum_{\mu} E\{a_{\mu} N_n [\mu T_0 + T]\} \right] = \\ &= E\{a_{\mu}^2\} y_n(T) + 0 = \sigma_a^2 C_n \end{aligned} \quad (\text{A } 3)$$

The middle step in (A.3) follows from (3.1) and the assumption that the amplitude levels and the noise are independent. We observe that (A.3) agrees with (3.4), as it should.

The expression for the average of Q_n^2 is

$$\begin{aligned}
 E\{Q_n^2\} &= \frac{1}{M^2} E\left\{\left(\sum_{\mu} \sum_{\nu} a_{\mu} a_{\nu} y_n[(\mu - \nu)T_0 + T] + \sum_{\mu} a_{\mu} N_n[\mu T_0 + T]\right)^2\right\} = \\
 &= \frac{1}{M^2} \left[E\left\{\left(\sum_{\mu} \sum_{\nu} a_{\mu} a_{\nu} y_n[(\mu - \nu)T_0 + T]\right)^2\right\} + E\left\{\left(\sum_{\mu} a_{\mu} N_n[\mu T_0 + T]\right)^2\right\} \right] - \\
 &= \frac{1}{M^2} [E_y + E_N] \quad (\text{A } 4)
 \end{aligned}$$

To evaluate (A.4) we start with the first term

$$E_y = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\varrho} \sum_{\delta} E\{a_{\mu} a_{\nu} a_{\varrho} a_{\delta}\} y_n[(\mu - \nu)T_0 + T] y_n[(\varrho - \delta)T_0 + T] \quad (\text{A } 5)$$

From (3.1) we conclude that

$$E\{a_{\mu} a_{\nu} a_{\varrho} a_{\delta}\} = \begin{cases} \sigma_a^4 & \begin{cases} \mu = \nu; \varrho = \delta; \mu \neq \varrho \\ \mu = \varrho; \nu = \delta; \mu \neq \nu \\ \mu = \delta; \nu = \varrho; \mu \neq \nu \end{cases} \\ E\{a_{\mu}^4\} & \mu = \nu = \varrho = \delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A } 6)$$

With (A.6) we can split (A.5) into four terms:

$$\begin{aligned}
 E_y &= \sum_{\mu} \sum_{\varrho \neq \mu} \sigma_a^4 y_n(T)^2 + \\
 &+ \sum_{\mu} \sum_{\nu \neq \mu} \sigma_a^4 y_n[(\mu - \nu)T_0 + T]^2 + \\
 &+ \sum_{\mu} \sum_{\nu \neq \mu} \sigma_a^4 y_n[(\mu - \nu)T_0 + T] y_n[(\nu - \mu)T_0 + T] + \\
 &+ \sum_{\mu} E\{a_{\mu}^4\} y_n(T)^2 = \\
 &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \quad (\text{A } 7)
 \end{aligned}$$

We now evaluate the different terms in (A.7) separately:

$$E_1 = \sigma_a^4 M(M-1) y_n(T)^2 \quad (\text{A } 8)$$

Introducing the squared distortion

$$D_n = \frac{1}{y_n(T)^2} \sum_{\nu \neq 0} y_n(\nu T_0 + T)^2$$

we have

$$E_2 = M \sigma_a^4 D_n y_n(T)^2 \quad (\text{A } 9)$$

To estimate E_3 we use Schwarz inequality

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{\nu \neq \mu} y_n[(\mu - \nu)T_0 + T] y_n[(\nu - \mu)T_0 + T] \right\}^2 \leq \\ & \leq \sum_{\nu \neq \mu} y_n[(\mu - \nu)T_0 + T]^2 \sum_{\nu \neq \mu} y_n[(\nu - \mu)T_0 + T]^2 = \\ & = \left\{ \sum_{\nu \neq \mu} y_n[(\mu - \nu)T_0 + T]^2 \right\}^2 \end{aligned}$$

Taking the square root on the left- and right-hand sides of this equation we get

$$\sum_{\nu \neq \mu} y_n[(\mu - \nu)T_0 + T] y_n[(\nu - \mu)T_0 + T] \leq \sum_{\nu \neq \mu} y_n[(\mu - \nu)T_0 + T]^2$$

that is

$$E_3 \leq E_2 \quad (\text{A } 10)$$

Finally we have the last term in (A.7):

$$E_4 = M E\{a_\mu^4\} y_n(T)^2 \quad (\text{A } 11)$$

The noise term in (A.4) will now be calculated:

$$\begin{aligned} E_N &= \sum_{\mu} \sum_{\varrho} E\{a_\mu a_\varrho\} E\{N_n(\mu T_0 + T) N_n(\varrho T_0 + T)\} = \\ &= \sigma_a^2 \sum_{\mu} E\{N_n(\mu T_0 + T)^2\} = M \sigma_a^2 E\{N_n(t)^2\} \end{aligned}$$

When the noise at the input $n(t)$ is assumed to be white and Gaussian with spectral density R_0 we have

$$\begin{aligned} E\{N_n(t)^2\} &= \iint E\{n(t - \tau_1) n(t - \tau_2)\} \varphi_n(\tau_1) \varphi_n(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= R_0 \int \varphi_n(\tau_1)^2 d\tau_1 = R_0 \end{aligned}$$

where the last step follows from (2.1). Thus

$$E_N = M R_0 \sigma_a^2 \quad (\text{A } 12)$$

Summarizing the results above we finally have

$$\begin{aligned}
 V\{Q_n\} &\leq \frac{1}{M^2} [(M(M-1)\sigma_a^4 + 2MD_n\sigma_a^4 + ME\{a_{\mu j}^4\})\gamma_n(T)^2 + M\sigma_a^2 R_0] \\
 &\quad - \sigma_a^4 \gamma_n(T)^2 = \\
 &= \frac{1}{M} [(V\{a_{\mu}^2\} + 2D_n\sigma_a^4)\gamma_n(T)^2 + \sigma_a^2 R_0] \quad (\text{A } 13)
 \end{aligned}$$

REFERENCES

1. BENNET, W. R. & DAVEY, J. R.: *Data Transmission*. New York 1965.
2. DiTORO, M. J.: *Communication in Time-Frequency Spread Media Using Adaptive Equalization*. Proc. Inst. Elect. Electronics Engrs 56(1968): 10, pp. 1653—1679.
3. ERICSON, T.: *On the Design of Adaptive Wiener Filters*. Ericsson Tech. 26(1970): 4 pp. 201—218.
4. GERSHO, A.: *Linear Adaption*. Bell Telephone Laboratories Inc. New Jersey 1969.
5. HIRSCH, D. & WOLF, W. J.: *A Simple Adaptive Equalizer for Efficient Data Transmission*. IEEE Trans Commun. Technol. COM—18(1970): 1, pp. 5—12.
6. KAUTZ, W. H.: *Transient Synthesis in the Time Domain*. IRE Trans Circuit Theory CT—1 (1954): 3, pp. 29—69.
7. LUCKY, R. W., SALZ, J. & WELDON, E. J.: *Principles of Data Communication*. New York 1968.
8. LUCKY, R. W.: *Automatic Equalization for Digital Communication*. Bell Syst. Tech. J. 44(1965): 4, pp. 547—588.
9. LUCKY, R. W. & RUDIN, H. R.: *Generalized Automatic Equalization for Communication Channels*. Proc. Inst. Elect. Electronics Engrs 54(1966): 3, pp. 439—440.
10. LUCKY, R. W. & RUDIN, H. R.: *An Automatic Equalizer for General-Purpose Communication Channels*. Bell Syst. Tech. J. 46(1967): 9, pp. 2179—2208.
11. PROAKIS, J. G. & MILLER, J. H.: *An Adaptive Receiver for Digital Signalling through Channels with Intersymbol Interference*. IEEE Trans Inform. Theory IT—15(1969): 4, pp. 484—497.
12. RICE, J. R.: *The Approximation of Functions*. Vol. 1: *Linear Theory*. Reading, Massachusetts 1964.
13. SALOMONSSON, G.: *Equalization of Data Channels with Recursive Filter*. [In Swedish.] The Lund Institute of Technology, Telecommunication Theory. Techn. Rep. IR—19, 1971.
14. SVENSSON, T.: *Phase Equalization with Orthonormal Filters*. [In Swedish.] The Lund Institute of Technology, Telecommunication Theory. Techn. Rep. IR—10, 1969.
15. WENDLAND, B.: *Abtastsysteme zur Entzerrung von Datenkanälen*. (Thesis.) Fakultät für Elektrotechnik der Technischen Universität Berlin, 1964.

Manuscript received by the Editor in May 1971.

The Influence of a Matched Filter on the Equalization of Data Channels.

by

Tommy Svensson

Abstract.

The optimum linear receiver for data transmission contains a filter matched to the received signal. When the information is transmitted over the switched telephone network the characteristics of this filter depend on which connection is available. In most papers concerning equalization of data channels all the adjustable parameters are located in the equalizer. In this paper comparisons are made between receivers with and without the matched filter. The quantities of interest are the rate of convergence and the residual distortion. The influence of the matched filter on the equalization is discussed for vestigial-sideband systems and partial-response IV systems. Simulations show that the inclusion of the matched filter can result in a faster convergence and a lower remaining distortion with fewer adjustable parameters.

1. Introduction

Whenever the telephone network is used in a pulse-modulated system for transmission of binary data, the received signal is corrupted by intersymbol interference and noise. When the modulation is linear Fig. 1.1 can be used as a model of the system.

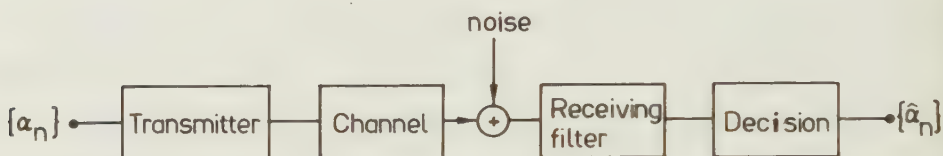


Fig. 1.1 The model of a data transmission system.

The information sequence $\{\alpha_n\}$ is converted into pulses suitable to the channel. In the receiver the pulse sequence, disturbed by intersymbol interference and noise, is filtered in the receiving filter after which the data sequence is reconstructed in the decision circuit. The aim is to make the system perform in such a way that the probability of error $P\{\alpha_n \neq \hat{\alpha}_n\}$ is as small as possible. It is known [7] that the optimum linear receiving filter consists of a cascade of a matched filter and a time-discrete filter. The matched filter maximizes the signal-to-noise ratio on its output at the sampling instants. Furthermore, the delay distortion will be completely eliminated. The time-discrete filter, the equalizer, should be so adjusted that it reduces as much as possible, the remaining linear distortion caused by the amplitude characteristic of the channel.

As the characteristics of the channel depend on which channel is available, the matched filter as well as the time-discrete filter have to be automatically adjustable. In the literature there are many descriptions of time-discrete equalizers [1] - [6]. An automatically adjustable matched filter is described in [10].

In most papers concerning equalization of data channels the matched filter is excluded. This is motivated by the fact that the noise disturbance in the telephone network is normally not harmful. However, if the number of adjustable parameters is fixed, it is not obvious that the optimum solution is to use all these parameters in the time-discrete filter. The fact that the delay distortion will be corrected by a matched filter implies that it might be advantageous to use some of the parameters in the matched filter. In this paper, a comparison between a receiving-filter with matched filter and one without will be presented. The quantities of interest are the residue distortion and the rate of convergence. The receiving filter is assumed to be adjusted by test pulses. In the analysis the influence of the noise is disregarded.

2. The matched filter.

A method of realizing an adaptive matched filter is suggested in [10]. This chapter contains a brief description of the proposed method.

If we have the pulse $x(t)$ at the receiver when a single test-pulse is transmitted, the impulse response of the matched filter should be

$$h(t) = x(T-t). \quad (2.1)$$

In order to get a causal approximation of the matched filter, the constant T in (2.1) could be chosen in such a way that $x(t)$ has its main energy for $t \leq T$.

Suppose that $\{\phi_n(t)\}_1^\infty$ is a complete set of orthonormal functions in the interval $0 \leq t < \infty$. We can then make an orthonormal expansion of $h(t)$, $t \geq 0$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t), \quad (2.2)$$

where the coefficients c_n are given by

$$c_n = \int_0^{\infty} h(t) \phi_n(t) dt = \int_0^{\infty} x(T-t) \phi_n(t) dt. \quad (2.3)$$

As the right hand side of (2.3) can be considered as a convolution, we can obtain c_n by letting the pulse $x(t)$ be the input to a linear filter with impulse response $\phi_n(t)$ and sample the output at $t=T$. A system of filters giving an orthonormal set of impulse responses is shown in Fig. 2.1 taken from [10].

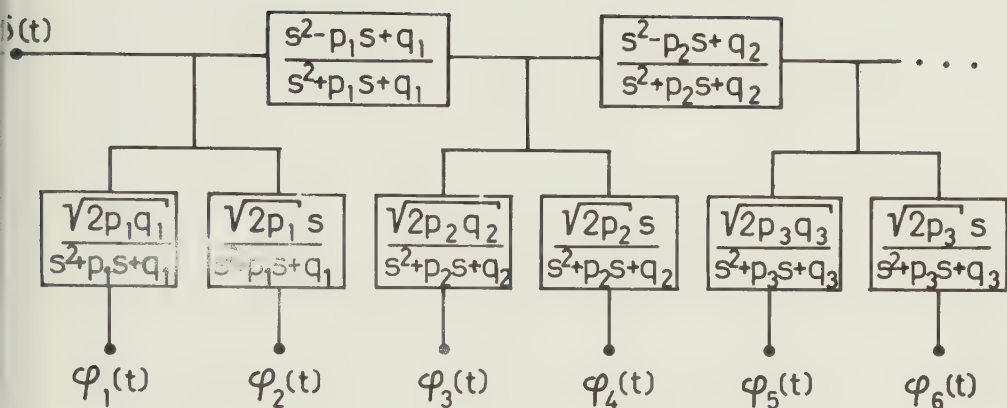


Fig. 2.1 The orthonormal filter.

In practice we of course have to limit the number of components in Fig. 2.1. This corresponds to truncating the sum in Eq. (2.2).

By choosing appropriate pole locations to the filters in Fig. 2.1 it should be possible to get a rapid convergence of the sum in (2.2). This means that we in practice can get an approximation of (2.1) with sufficient accuracy by using a relatively small number of terms in the sum.

3. The Time-Discrete Filter.

As equalizer we use a transversal filter as in Fig. 3.1.

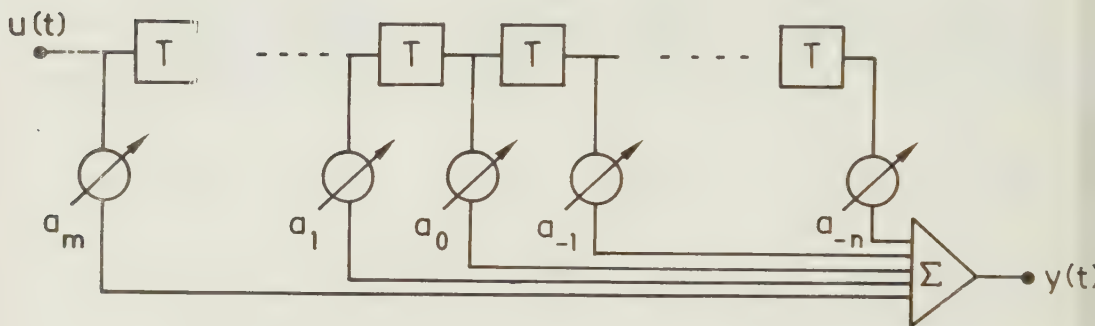


Fig. 3.1 Transversal-filter equalizer.

The outputs of the delay line are connected through adjustable tap weights a_ℓ to a summing amplifier at the output of which we have the equalized signal. Data is transmitted every T seconds and the time-discrete outputs of the filter $y_k = y(kT)$ are used to detect the information. In Fig. 3.1 we see the relation between in- and output of the equalizer

$$y_k = \sum_{\ell} a_{\ell} u_{k-\ell}. \quad (3.1)$$

When a single test pulse is transmitted, the sequence $\{y_k\}$ is the sampled impulse response of the entire system. The sampled impulse response of an ideal system is denoted by $\{d_k\}$. The tap weights a_ℓ should thus be adjusted in such a manner that the sequences $\{y_k\}$ and $\{d_k\}$ coincide as well as possible according to some specified crite-

tion. The criteria most used are:

1. minimization of the peak distortion

$$\epsilon_p = \sum_k |y_k - d_k| = \sum_k |\gamma_k| \quad (3.2)$$

and

2. minimization of the mean squared error

$$\epsilon_s = \sum_k (y_k - d_k)^2 = \sum_k \gamma_k^2. \quad (3.3)$$

The peak distortion.

It is shown [2] that a necessary condition of minimum of (3.2) is that at least as many terms in the sum are equal to zero as the number of coefficients a_k of the equalizer ($m + n + 1$). Most often, those terms in (3.2), which are inside the length of the equalizer, are chosen to be forced to zero. This does not generally give the minimum of (3.2) but in most cases get very close to the optimum. The zero-forcing algorithm we are going to use is given by [4]

$$\bar{a}^{(r+1)} = \bar{a}^{(r)} - \Delta \bar{\gamma}^{(r)}, \quad (3.4)$$

$$\bar{\gamma}^{(r)} = B \bar{a}^{(r)} - \bar{d}, \quad (3.5)$$

where Δ is a constant greater than zero and

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_m \\ \vdots \\ a_0 \\ \vdots \\ a_{-n} \end{bmatrix} ; \quad \bar{d} = \begin{bmatrix} d_{-m} \\ \vdots \\ d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} ;$$

(3.6)

$$B = \begin{bmatrix} u_0 & u_{-1} & \cdots & u_{-(m+n)} \\ u_1 & u_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & u_1 & & u_{-1} \\ u_{m+n} & & u_1 & u_0 \end{bmatrix}$$

Combining (3.4) and (3.5) we have

$$\begin{aligned} \bar{r}_Y^{(r)} &= B(\bar{a}^{(r-1)} - \Delta \bar{r}_Y^{(r-1)}) - \bar{d} = \\ &= (I - \Delta B) \bar{r}_Y^{(r-1)} = (I - \Delta B) \bar{r}_Y^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

where I denotes the $(m + n + 1) \times (m + n + 1)$ identity matrix.

The properties of convergence of the equalizer are thus depending on the convergence of $(I - \Delta B)^r$.

The mean squared error.

With matrix formulation, Eq. (3.3), after inserting (3.1), can be written [5]

$$\epsilon_S = \bar{a}^T W \bar{a} - 2 \bar{a}^T \bar{f} + \bar{d}^T \bar{d}, \quad (3.8)$$

where $\bar{a}$ and $\bar{d}$ are defined in (3.6) and where

$$W = \begin{bmatrix} \sum_l u_l^2 & \sum_l u_l \cdot u_{l-1} \cdot \cdot \cdot \sum_l u_l \cdot u_{l-(m+n)} \\ \vdots & \\ \sum_l u_l \cdot u_{l-1} & \\ \vdots & \\ \sum_l u_l \cdot u_{l-(m+n)} & \sum_l u_l^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \sum_l u_{l-m} d_l \\ \vdots \\ \sum_l u_l d_l \\ \vdots \\ \sum_l u_{l+n} d_l \end{bmatrix}$$

From (3.8) the gradient vector can be calculated

$$\frac{\partial \epsilon_S}{\partial \bar{a}} = 2W\bar{a} - 2\bar{f}. \quad (3.10)$$

This gradient vector we can use in the method of steepest descent and we then get the algorithm of adjusting the coefficients

$$\begin{aligned}
 \bar{a}^{(r+1)} &= \bar{a}^{(r)} - \frac{1}{2} \Delta \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \bar{a}^{(r)}} = \\
 &= \bar{a}^{(r)} - \Delta (W \bar{a}^{(r)} - \bar{f}) = \\
 &= (I - \Delta W) \bar{a}^{(r)} + \Delta \bar{f}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

If the process converges, the gradient vector has to vanish. According to (3.10) the coefficient vector must converge to the optimum vector

$$\bar{a}_{\text{opt}} = W^{-1} \bar{f}. \tag{3.12}$$

We define the vector $\bar{e}^{(r)}$ as the difference between the actual coefficient vector and the optimum one

$$\bar{e}^{(r)} = \bar{a}^{(r)} - \bar{a}_{\text{opt}} = \bar{a}^{(r)} - W^{-1} \bar{f}. \tag{3.13}$$

Inserting (3.11) into (3.13), we obtain

$$\bar{e}^{(r)} = (I - \Delta W) \bar{e}^{(r-1)} = (I - \Delta W)^r \bar{e}^{(0)}. \tag{3.14}$$

We note that Eq. (3.14) and Eq. (3.7) have exactly the same form, which means that the two methods can be treated simultaneously with respect to the rate of convergence. One important difference should, however, be observed. The matrix W in (3.14) is always symmetric and has hence only real eigenvalues. This is usually not the case with the B -matrix in Eq. (3.7).

4. Properties of convergence.

Let V and Z be real $n \times n$ matrixes. It can be shown that Z^r converges when $r \rightarrow \infty$, if, and only if, the eigenvalues of Z λ_{zi} $i = 1, n$ are located inside the unit circle. Let Δ be a constant greater than zero and I the $n \times n$ identity matrix. Suppose that

$$Z = I - \Delta V, \quad (4.1)$$

The eigenvalues of Z are related to the eigenvalues of V by

$$\lambda_{zi} = 1 - \Delta \lambda_{vi} \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.2)$$

A necessary and sufficient condition for convergence of Z^r is thus

$$|1 - \Delta \lambda_{vi}| < 1 \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.3)$$

From (4.3) we conclude that the eigenvalues of V must be located inside a circle with the radius $1/\Delta$ and centered at $1/\Delta$.

Suppose that Z is diagonalizeable. This is always true if either Z has distinct eigenvalues or Z is a symmetric matrix. We can then write [12]

$$Z^r = T \begin{bmatrix} \lambda_{z1}^r & & 0 \\ & \lambda_{z2}^r & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_{zn}^r \end{bmatrix} T^{-1}, \quad (4.4)$$

where T is a regular matrix. A rapid convergence of Z^r obviously demands that all the eigenvalues λ_{zi} should be small. To guarantee this Δ is chosen in such a manner that the spectral radius

$$\rho(Z) = \max_i (|\lambda_{zi}|) = \max_i (|1 - \Delta \lambda_{vi}|) \quad (4.5)$$

is minimum.

To obtain a small value of $\rho(Z)$, the eigenvalues of V have to be closely located. Especially if all the eigenvalues of V are equal ($\lambda_{vi} = \lambda_v$, $i = 1, \dots, n$) $\rho(Z)$ can be made zero by choosing $\Delta = 1/\lambda_v$, and Z^r has converged when $r = 1$.

In those cases where (4.4) is not valid, we can instead use the normal form of Jordan, which is applicable to all square matrixes [12]

$$Z^r = S \begin{bmatrix} J_1^r & & \\ & J_2^r & \\ & & \ddots \\ & & & J_k^r \end{bmatrix} S^{-1}, \quad (4.6)$$

where each J_v has one of the forms

$$\lambda_{zv} : \begin{pmatrix} \lambda_{zv} & 1 \\ & \lambda_{zv} \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_{zv} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \lambda_{zv} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{zv} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_{zv} \end{pmatrix} ; \dots$$

and S is a regular matrix.

From (4.6) we realize that a rapid convergence demands all the λ_{zi} 's to be small, and if especially all of them are equal to zero, Z^r converges to zero when r is at most equal to $n-1$.

As matrix norm we use the Hilbert norm defined by [12]

$$||A|| = \sup_{\bar{y} \neq 0} \frac{|A\bar{y}|}{|\bar{y}|} = \sup_{|\bar{y}|=1} |A\bar{y}|, \quad (4.7)$$

where $|\cdot|$ denotes the Euclidean vector norm i.e.

$$|\bar{y}| = (\sum_k y_k^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.8)$$

The Hilbert norm has the property

$$\rho(A) \leq ||A||, \quad (4.9)$$

where $\rho(A)$ is the spectral radius defined in (4.5). Equality holds when A is a symmetric matrix.

The convergence equations (3.7) and (3.14) are both of the form

$$\bar{\omega}^r = Z^r \bar{\omega}^{(0)}. \quad (4.10)$$

With the introduced matrix norm we have

$$||Z^r|| = \sup_{\bar{\omega}^{(0)} \neq 0} \frac{|\bar{\omega}^{(r)}|}{|\bar{\omega}^{(0)}|}, \quad (4.11)$$

Eq. (4.11) shows that no matter which is the initial setting of the equalizer coefficients the error reduction at iteration number r is

at least equal to $1/||Z^r||$. We now look for the value of r which makes $||Z^r||$ less or equal to a fixed number ϵ . If Z is a symmetric matrix, equality holds in (4.9) and we have

$$||Z^r|| = \rho(Z)^r < \epsilon. \quad (4.12)$$

We define the measure of convergence as

$$R = - \frac{1}{\log \rho(Z)}. \quad (4.13)$$

As R is a positive number, when Z^r converges we get

$$r > - R \log \epsilon. \quad (4.14)$$

It is sufficient to choose r as the smallest integer which exceeds the right-hand side in (4.14). The number of required iterations, r , is thus essentially proportional to the measure of convergence, R , with the proportionality constant $-\log \epsilon$. As equality does not hold in Eq. (4.9), this is not generally true for nonsymmetric matrixes. Nevertheless, we will use R as a measure of convergence for all matrixes, but we have to bear in mind that this might be somewhat optimistic for nonsymmetric matrixes.

In the annex it is proved that the eigenvalues of a symmetric matrix such as W in (3.9) are spread out when the order of the matrix is increased. This is not generally the case for the B -matrix in (3.6) but most often typical B -matrixes show this tendency. As the order of the B - (or W -) matrix is equal to the number of coefficients of the

equalizer, we realize that if we want a rapid convergence of the equalizer we have to limit the number of coefficients. The equalizer systems manufactured up to now usually have a rather large number of tap weights, e.g. 19. This number can be considerably smaller if we include the matched filter since the delay distortion is completely eliminated. The realization of the matched filter will of course require a certain number of parameters but the convergence of the equalizer is not dependent of them. If the matched filter is constructed as in [10] it will affect the total settling time very little. In the noiseless case, which we consider here, the filter needs just one test pulse to adjust its parameters.

5.1 VSB system.

Consider the vestigial-sideband system in Fig. 5.1

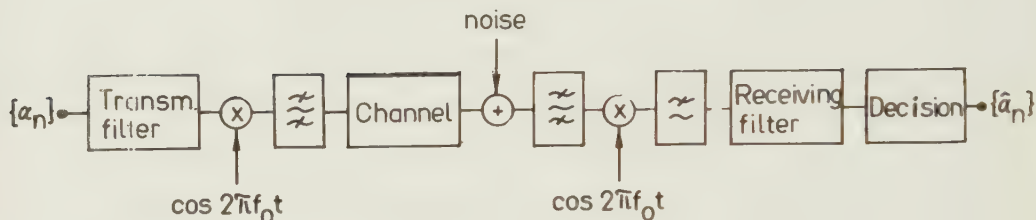


Fig. 5.1 The model of the VSB system.

The output from the transmitting filter is modulated by the carrier $\cos 2\pi f_0 t$ to a frequency band suitable for the channel. After the channel, the signal is demodulated by multiplication of the received signal by $\cos 2\pi f_0 t$, the result being filtered in a low-pass filter. The filters in the system are to be constructed in such a way that their total amplitude characteristic is a Nyquist characteristic, e.g. raised cos roll off [1].

In recent papers concerning equalization of data channels the receiving filter is most often constructed as a time discrete equalizer adjusted to the minimum mean squared error [3], [5]. This adjusting method is used because it is generally more rapid and more secure than the zero forcing method. If we study the W -matrix in (3.9) we realize

that its elements are the output samples which we would get from a time-discrete matched filter with the sampled received test pulse as input. This means that although the parameters of the equalizer are supposed to equalize the delay distortion as well as the amplitude distortion of the channel the convergence is merely depending on the amplitude characteristic of the sampled output from the channel. When the zero-forcing method is used both the delay and amplitude characteristics will influence the convergence.

If a matched filter precedes the equalizer, the B-matrix in (3.6) will be similar to the W-matrix in (3.9). The difference is that when a time continuous matched filter is used no additional amplitude distortion can be caused by the sampling process. An equalizer preceded by a matched filter and adjusted according to the zero forcing method will therefore have good convergence properties. Furthermore, as the delay distortion is eliminated in the matched filter, the number of coefficients can be considerably smaller. In chapter 4 we pointed out that this means a faster convergence. Yet another advantage of this receiving filter configuration is that the practical realization of the adjusting algorithm is simpler for zero forcing than for minimum mean squared error.

If the delay distortion is very severe at the upper band edge of the channel it may be advantageous to modify the receiver of Fig. 5.1. Let us assume that the signal before the demodulation has the characteristics as in Fig. 5.2a. Then at the demodulation process we get a complex folding around the carrier frequency f_0 . The imaginary part will thus

cause a dip on the amplitude spectrum of the demodulated signal (Fig. 5.2b). The matched filter causes this dip to be even deeper. This inconvenience can be eliminated if we locate the matched filter before the demodulator. In so doing, the folding process applies on a pure real spectrum and no additional amplitude distortion can be caused.

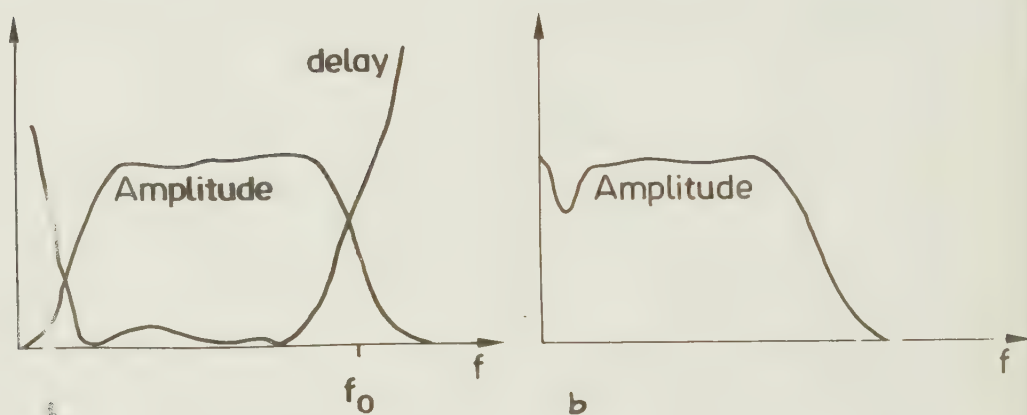


Fig. 5.2 Frequency characteristics of the VSB data signal a) before and b) after the demodulation.

5.2 Partial-response system.

Recent papers [8], [9] concerning effective decoding methods for partial-response systems have considerably increased the interest in such systems. In partial-response systems, additional amplitude levels are inserted into the received signal and these cause a reduction in the effective signal-to-noise ratio when conventional symbol-by-symbol decision is used. In the new decoding methods this disadvantage is almost eliminated. The properties of partial-response class IV, nulls in the upper and lower frequency band edges [1], make this class particularly interesting since the linear distortion normally is worst at the band edges. We therefore concentrate on this class.

When a test pulse is transmitted through a partial response IV system the desired output of the equalizer is

$$y_k = y(kT) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = -1 \\ -1 & \text{if } k = +1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.1)$$

This signal has the frequency spectrum

$$Y(f) = 2j \sin 2\pi fT. \quad (5.2)$$

As earlier mentioned, the optimal receiver can be realized as in Fig. 5.3.

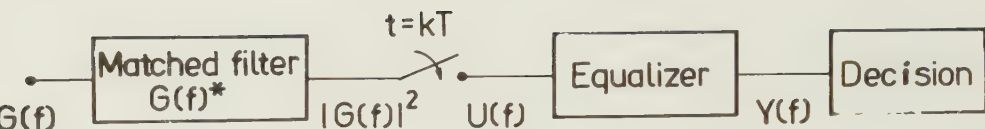


Fig. 5.3 The optimum linear receiver.

Let us for a moment divide the equalizer in Fig. 5.3 into two filters in cascade. The first filter is a conventional equalizer which equalizes the incoming signal to a signal with the frequency spectrum

$$Y_1(f) = 2|\sin 2\pi fT|. \quad (5.3)$$

The second filter is a constant filter with the transfer function

$$E(f) = \begin{cases} j & \text{if } \sin 2\pi fT \geq 0 \\ -j & \text{if } \sin 2\pi fT < 0 \end{cases}. \quad (5.4)$$

The product of $Y_1(f)$ and $E(f)$ gives $Y(f)$ in (5.2). The filter defined by (5.4) is an all-pass filter the phase of which is given in Fig. 5.4.

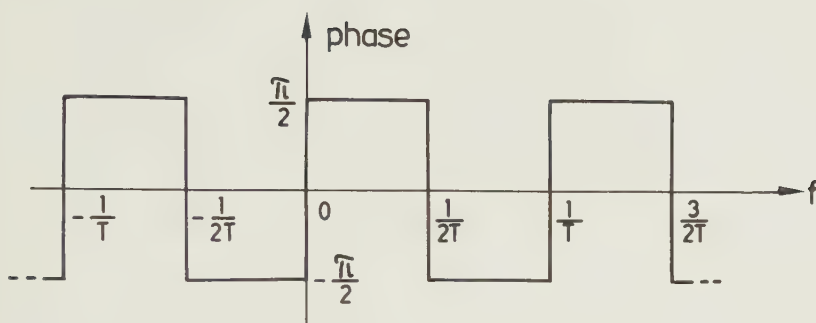


Fig. 5.4 The phase function of $E(f)$.

In a partial-response IV system $G(f)$ in Fig. 5.3 can be made zero outside the frequency band $|f| < 1/2T$. As a consequence of this we do not have any folding of the spectrum in the sampling process. Therefore we do not change the total transfer function if we replace the all-pass network by another all-pass filter located in front of the sampler. The phase of the new all-pass filter is given by

$$\phi(f) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{if } f \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } f < 0 \end{cases}. \quad (5.5)$$

As the equalizer is now the last network before the decision circuit its output must be equalized towards Eq. (5.1). The phase shift in Eq. (5.5) can be obtained if we place the matched filter before the demodulator and let the demodulating signal be shifted $\pi/2$ in relation to the carrier. As a model of an optimum partial response IV system we can thus use Fig. 5.5

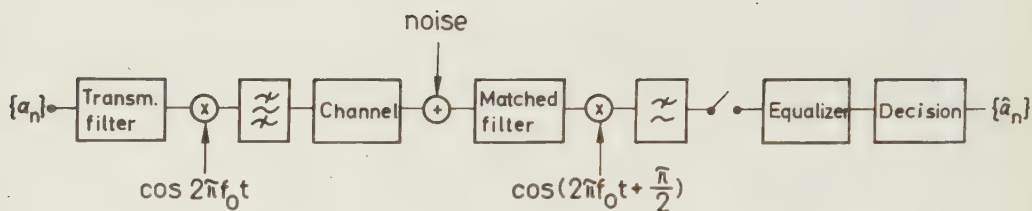


Fig. 5.5 The model of the partial response IV system.

The different filters in Fig. 5.5 are to be dimensioned in such way that an ideal channel will cause the total transfer function to be $2j\sin 2\pi fT$.

If we construct the W -matrix in (3.9) when the input to the equalizer is the ideal signal i.e. $u_k = y_k$ in (5.1), we get

$$W = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & 2 & 0 & & \\ 0 & -1 & 0 & 2 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Chang [5] has calculated the eigenvalues of this matrix as a function of the order of the matrix. These calculations show that the spectral radius $\rho(W)$ increases very rapidly with the number of

equalizer coefficients. If, for example, the equalizer has 17 coefficients we get $\rho(W) = 0.95$. This means that even if the input to the equalizer is very close to the ideal signal, e.g. there is only a difference of a constant factor, the convergence will be extremely slow when the equalizer is adjusted to minimum mean squared error.

If we instead apply the zero-forcing algorithm on the equalizer when the ideal signal is the input, we get the B-matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} . \quad (5.7)$$

In the B-matrix we have introduced a delay of one unit of time compared with Eq. (5.1). If we insert (5.1) directly into the B-matrix (3.6), we get a matrix with pure imaginary eigenvalues, and as a consequence of this no convergence can be obtained.

The B-matrix in (5.7) has all its eigenvalues in the same point, $\lambda_i = 1$ all i . This means that we have a rapid convergence for signals close to the ideal one.

The argumentation above shows that, on partial-response IV channels, it is less suitable to adjust the equalizer with the minimum mean squared error algorithm. The zero-forcing algorithm, on the other

hand, has better convergence properties. Since an inclusion of a matched filter reduces the disadvantages of the zero-forcing method the partial-response IV system in Fig. 5.5 ought to be a good solution.

6. Computer simulations.

In order to illustrate the behaviour of an equalizer with and without a matched filter the VSB and the partial response IV systems were simulated on a computer. In this chapter we will present results from simulations of data transmission over two different channels from the regular Swedish telephone network. The characteristics of these channels are shown in Fig. 6.1 and 6.2. In the future we will refer to these channels as Ch1 and Ch2, respectively. According to the practice of the Swedish telephone administration the two channels meet the requirements for data transmission with a rate up to 2400 bauds. As our purpose was to test an effective receiving filter our simulations were made at a higher baud rate. When the matched filter was included in the receiver, the systems were tested with the numbers of the equalizer coefficients were equal to 9, 11, 13 and 15. Without the matched filter in the system, the corresponding numbers were 17, 19, 23 and 27.

In the simulations of the VSB-system the model in Fig. 5.1 was used. The baud rate was equal to 3600 and data was transmitted in the frequency band 900 - 2700 Hz of the channels. The VSB-filter had a raised cos-roll-off amplitude characteristic with a 10 percent roll-off centered at the channel's upper band edge. The performance of the different shaping filters was such that if the channel had flat amplitude and group delay characteristics the frequency response from transmitter to receiver would be a raised cos-roll-off function with 50 percent roll-off.

The results from the VSB simulations are shown in Fig. 6.3 - 6.5. In Fig. 6.3 we can see how $(I - \Delta B)^r$ converges on the two channels when the zero-forcing method is used to adjust the equalizer. On the abscissa, we have the number of equalizer coefficients, and on the ordinate we have the measure of convergence R defined in Eq. (4.13). It can be seen that the inclusion of the matched filter in the receiver makes the convergence faster. The corresponding curves, when the equalizer was adjusted to minimum mean squared error, are plotted in Fig. 6.4. The remaining peak distortion for the zero forcing method can be seen in Fig. 6.5.

The matched filter we have used up to now has been an ideal one, i.e. its transfer function has been the complex conjugate of the frequency spectrum of the received signal. In order to illustrate what can be obtained when we have a realizable matched filter, we have simulated the orthonormal filter described in chapter two. We supposed that the two used channels were selected from a broader class of channels. Therefore we have not tried to optimize the pole locations of the orthonormal filter although this could be done with the method described in [11]. We merely placed the poles along a straight line parallel to the imaginary axis in the s -plane. The following poles were used in the filter:

$$(0.3 \pm 0.15)\omega_0$$

$$(0.3 \pm 0.45)\omega_0$$

$$(0.3 \pm 0.75)\omega_0$$

$$(0.3 \pm 1.05)\omega_0$$

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 1800 \text{ rad/sec.}$$

The signals before and after the orthonormal filter can be found in Fig. 6.6 and 6.7. Although the inputs are quite different for Ch1 and Ch2 we see that a good matching is obtained for both the channels. The values of R and the residual peak distortion for the signals after the orthonormal filter are plotted in Fig. 6.3 and 6.5, respectively.

We now turn to the simulations of the partial-response IV system. The model used is shown in Fig. 5.5. As the partial-response IV system is less sensitive than the VSB system to the edge effects of the channel we have increased the baud rate to 4800 bauds. Data was transmitted in the frequency band 600 - 3000 Hz of the channel. The filters in the system were so dimensioned that an ideal channel would give a total transfer function according to Eq. (5.3).

In Fig. 6.8 we have the measure of convergence R as function of the number of coefficients in the equalizer when the zero-forcing algorithm was used. Fig. 6.9 shows the corresponding curves when the algorithm which minimizes the mean squared error was used. From these two figures it is evident that the number of required iterations grows much faster for the minimum mean squared error algorithm than for the zero-forcing method. Finally, in Fig. 6.10, we can see the residual peak distortion of the partial-response IV system when the zero forcing algorithm was used. In this Figure we have omitted Ch1 without the matched filter. Although Ch1 meets the requirement of convergence of the algorithm, the procedure does not converge to a good solution. The reason for this is that the severe delay distortion has made it impossible to select the proper main pulse. This phenomenon never occurs when the matched filter is included in the receiver.

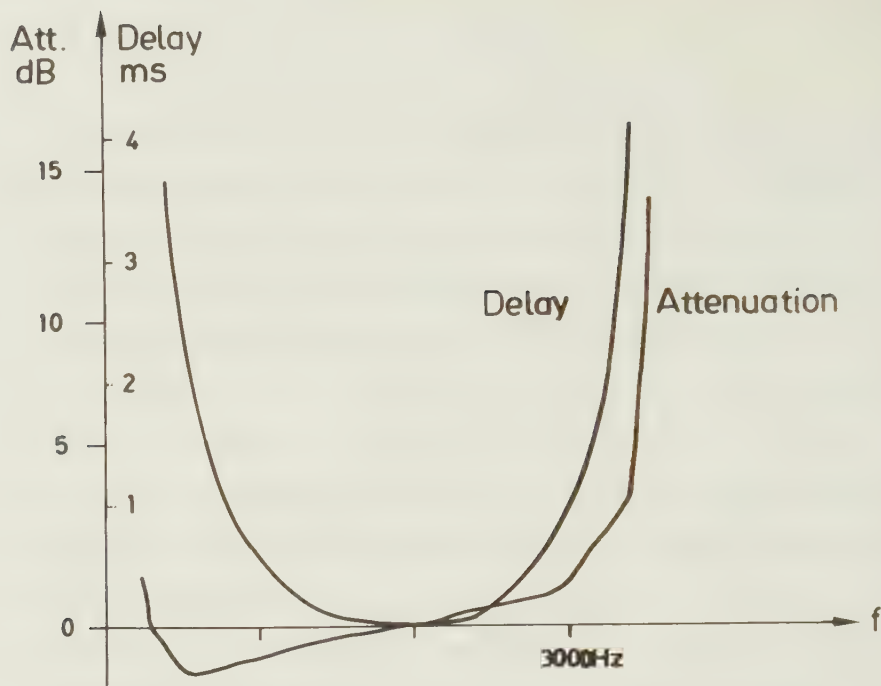


Fig. 6.1 Frequency characteristics of Ch1.

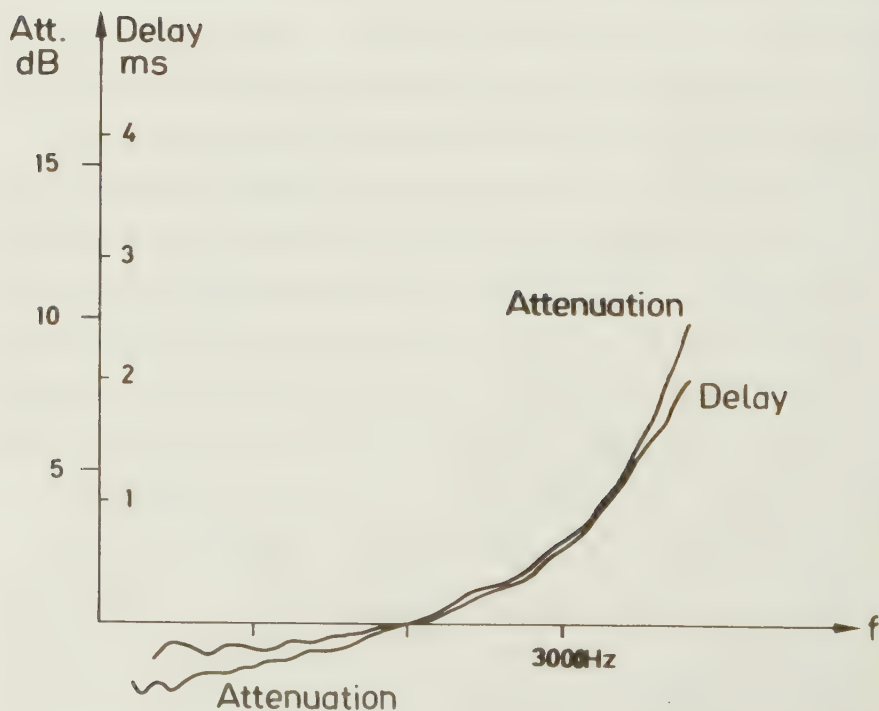


Fig. 6.2 Frequency characteristics of Ch2.

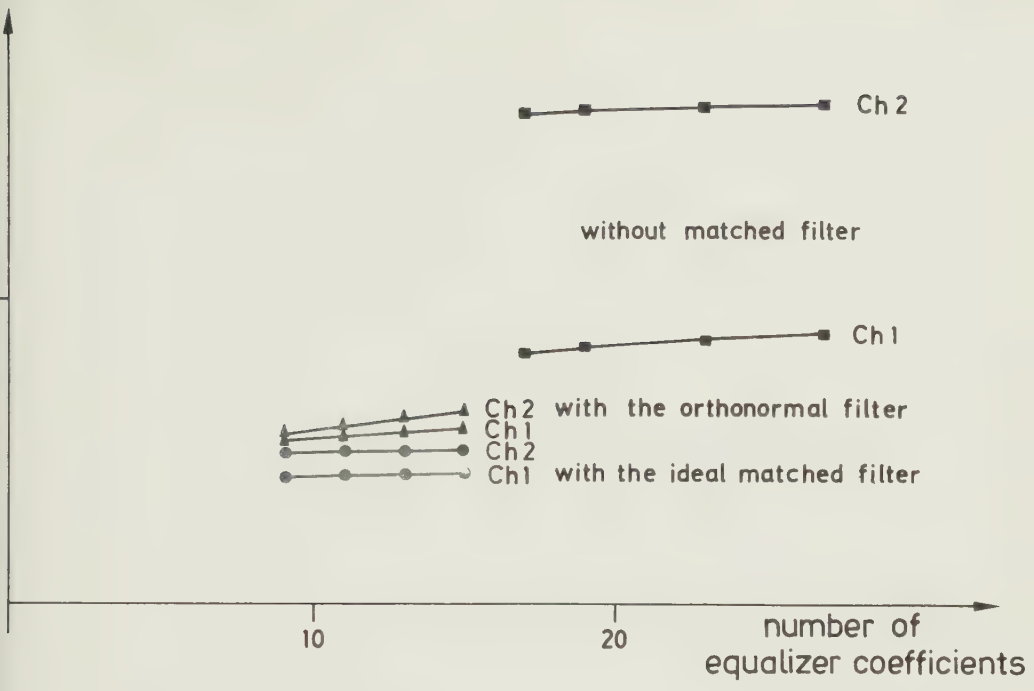


Fig. 6.3 The measure of convergence when the zero-forcing algorithm was used on the VSB system.

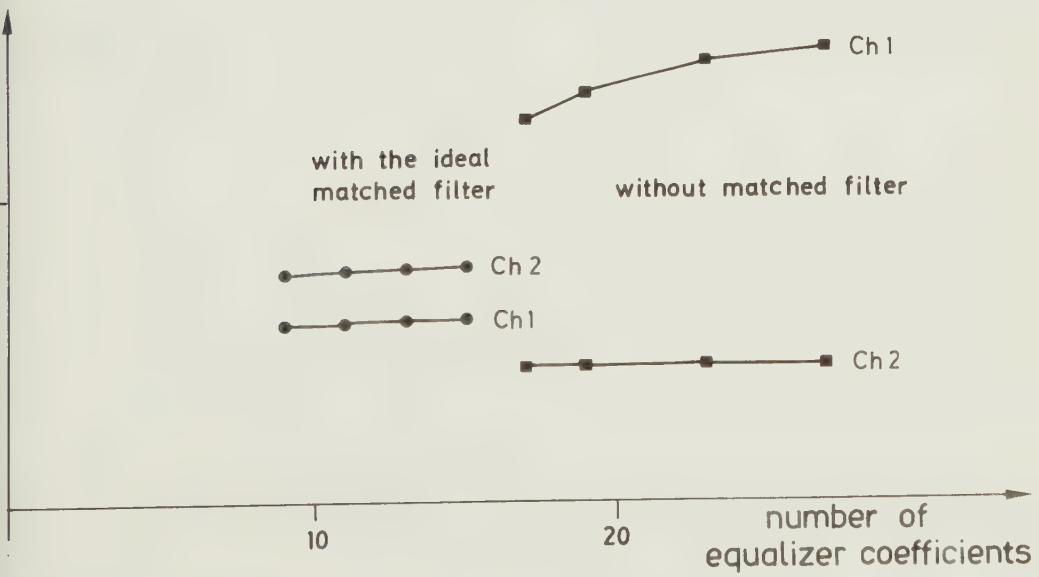


Fig. 6.4 The measure of convergence when the minimum mean squared error algorithm was used on the VSB system.

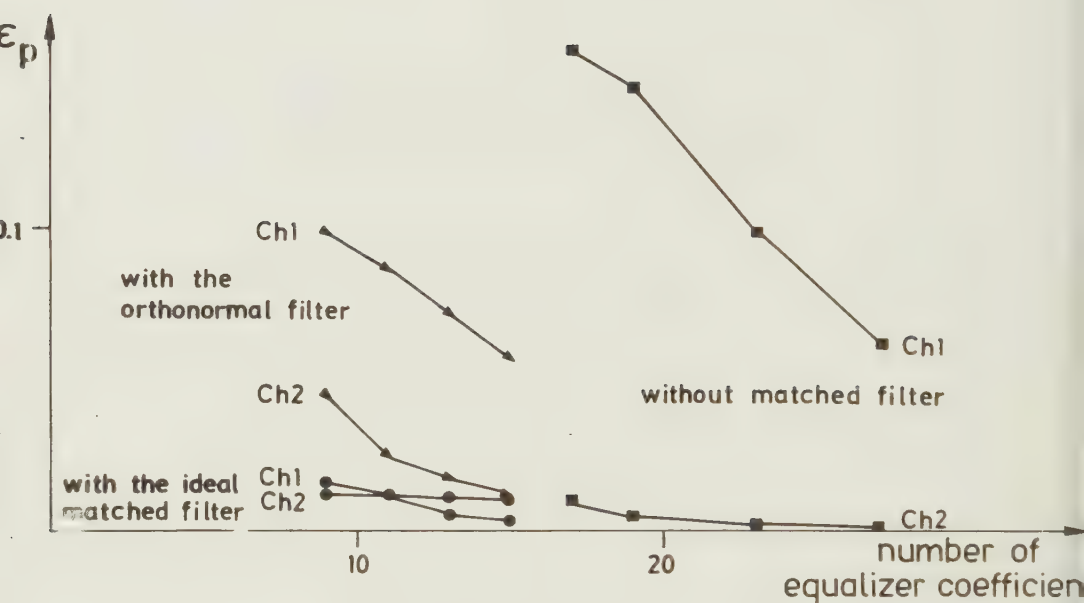


Fig. 6.5 The residual peak distortion when the zero-forcing algorithm was hold on the VSB system.

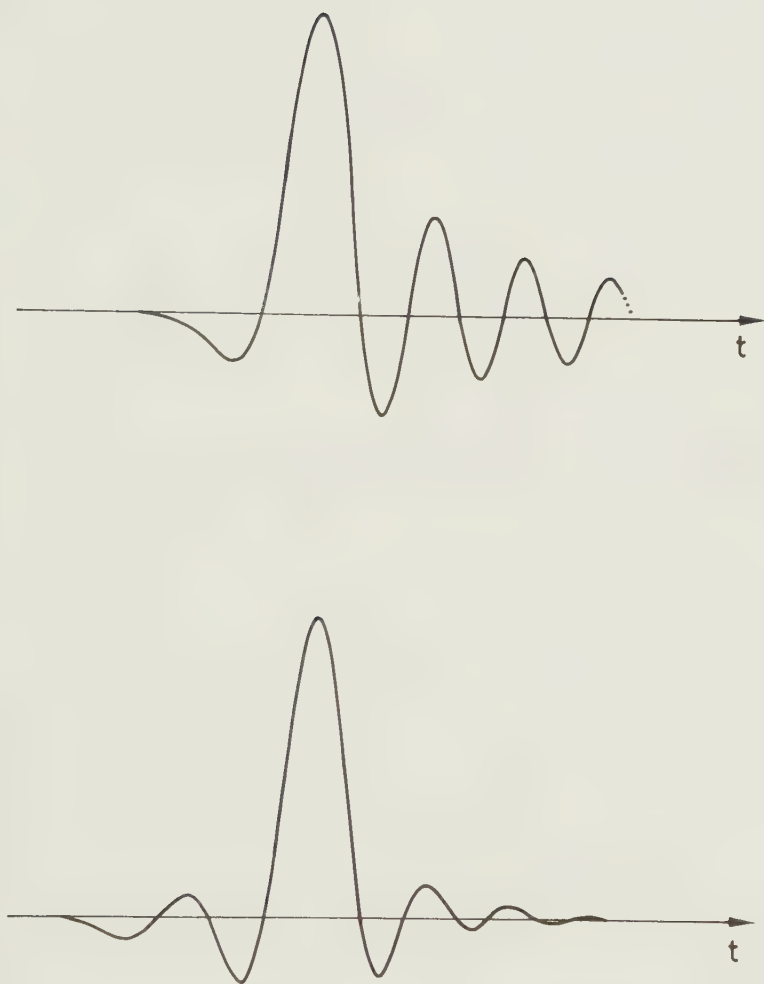


Fig. 6.6 The signals before and after the orthonormal filter when Ch1 was used.

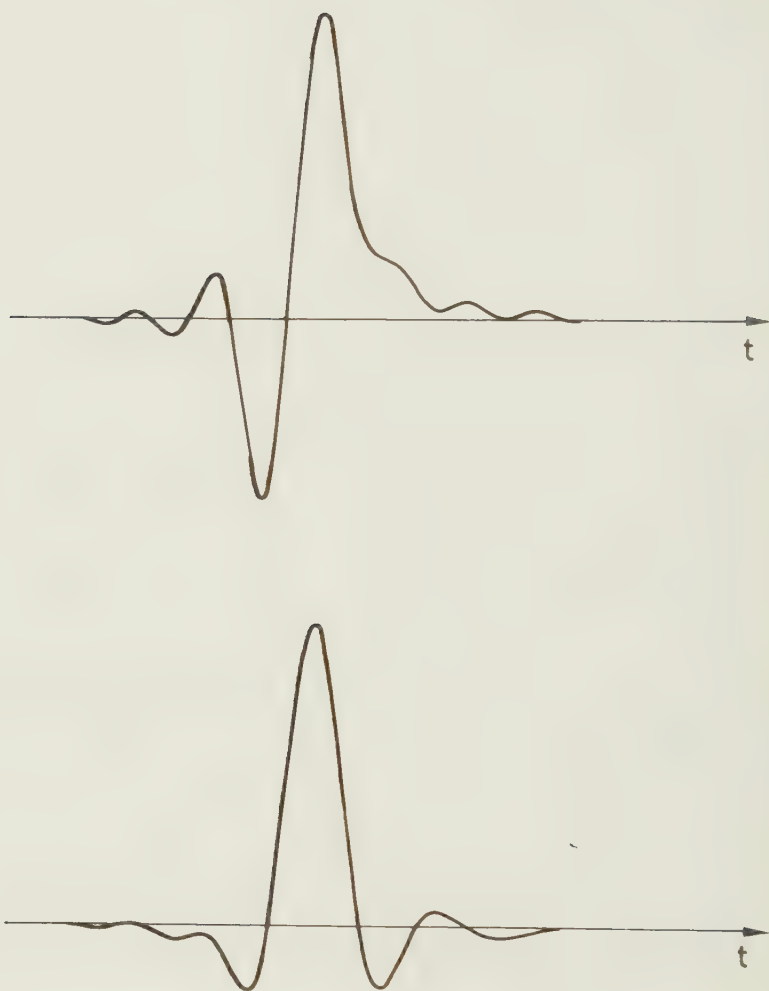


Fig. 6.7 The signals before and after the orthonormal filter when Ch2 was used.

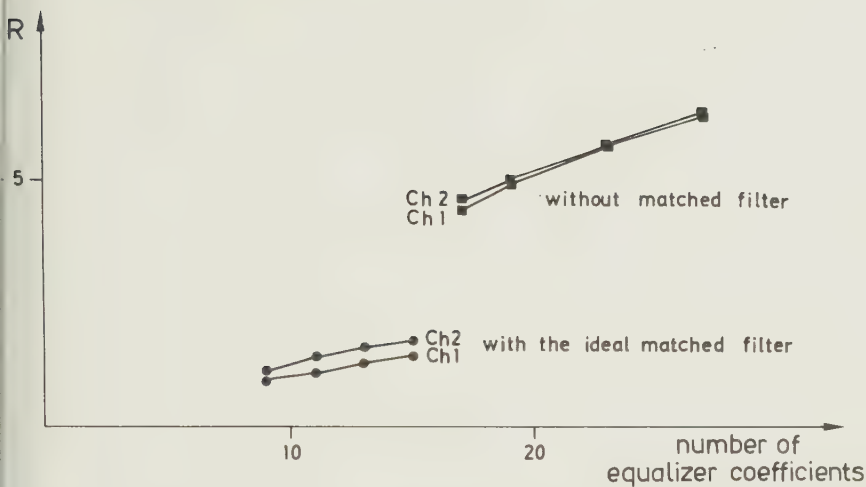


Fig. 6.8 The measure of convergence when the zero-forcing algorithm was used on the partial-response IV system

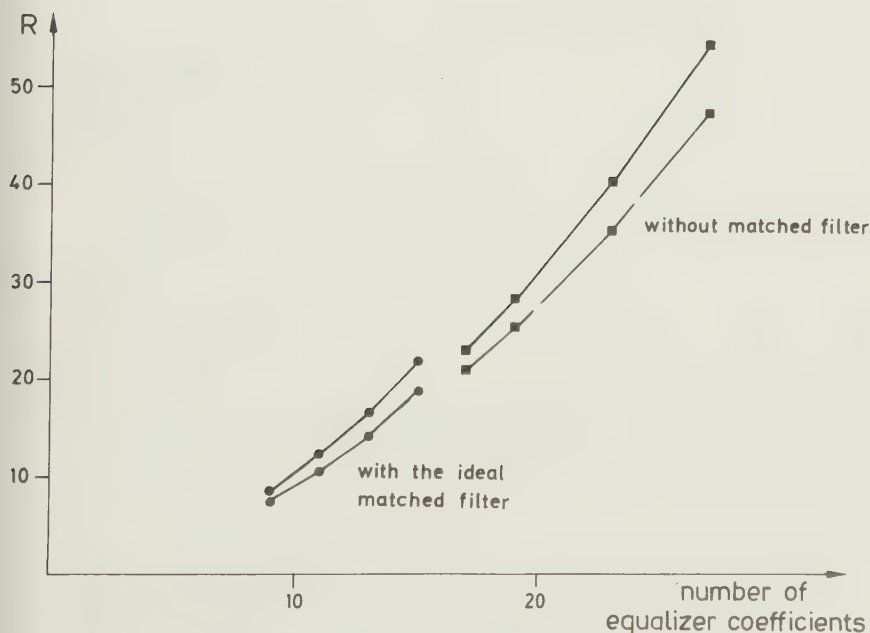


Fig. 6.9 The measure of convergence when the minimum mean squared error algorithm was used on the partial-response IV system.

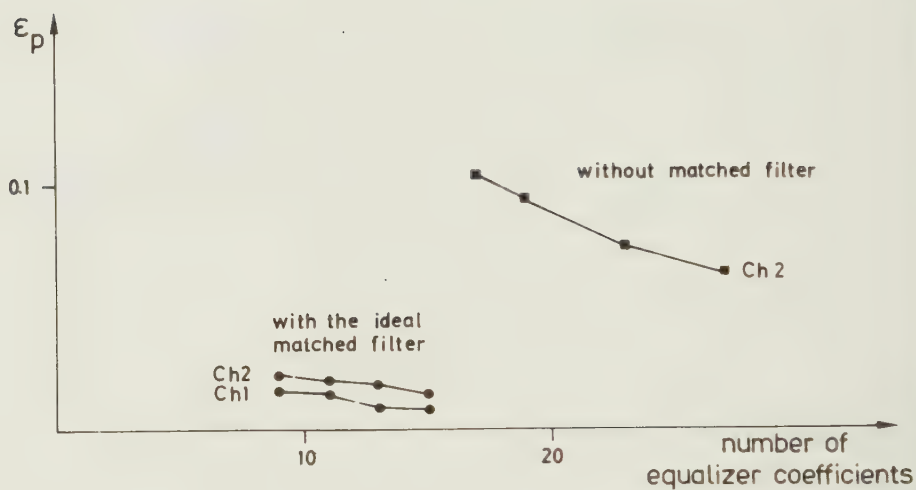


Fig. 6.10 The residual peak distortion when the zero-forcing algorithm was used on the partial-response IV system.

Annex

Let Z_n be a symmetric $n \times n$ correlation matrix of the form

$$Z_n = \begin{bmatrix} 1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \\ z_2 & 1 & z_2 & & \\ z_3 & z_2 & 1 & & \\ \vdots & & & & \\ z_n & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (A.1)$$

If $|z_v| < 1 \quad v=2, \dots, n$, it can be shown that Z_n is a positively definite matrix. The eigenvalues of Z_n are thus real and positive.

We define $\hat{Z}_n$ by

$$\hat{Z}_n = \begin{bmatrix} (Z_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (A.2)$$

The Hilbert matrix norm of Z_n is

$$\|Z_n\| = \sup_{|\bar{x}|=1} |Z_n \bar{x}|, \quad (A.3)$$

where $|\cdot|$ denotes the Euclidean vector norm

$$|\bar{x}| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (A.4)$$

For symmetric matrixes the Hilbert norm can be shown to be equal to the absolute largest eigenvalue of the matrix. As all the eigenvalues are positive we thus have

$$||Z_n|| = \lambda_{\max}^{(n)}. \quad (\text{A.5})$$

If $f_{n-1}(\lambda) = 0$ is the characteristic equation of Z_{n-1} , the characteristic equation of $\hat{Z}_n$ will be

$$\hat{f}_n(\lambda) = (1 - \lambda) f_{n-1}(\lambda) = 0. \quad (\text{A.6})$$

$\hat{Z}_n$ has thus the same eigenvalues as Z_{n-1} , plus an additional eigenvalue equal to 1. Since the trace of Z_{n-1} is equal to the sum of eigenvalues, we must have

$$\lambda_{\min}^{(n-1)} \leq 1 \leq \lambda_{\max}^{(n-1)} \quad (\text{A.7})$$

and as a consequence of this

$$||\hat{Z}_n|| = ||Z_{n-1}||. \quad (\text{A.8})$$

Let $\bar{x}$ be an arbitrary vector with

$$|\bar{x}| = 1, \quad (\text{A.9})$$

and consider the quantity

$$|Z_n \bar{x}|^2 - |\hat{Z}_n \bar{x}|^2. \quad (\text{A.10})$$

Let $\bar{x}'$ be the vector for which

$$|\hat{Z}_n \bar{x}'| = ||\hat{Z}_n||. \quad (\text{A.11})$$

Eq. (A.8) implies that $x_n^* = 0$.

Inserting $\bar{x}$ into (A.10), we obtain

$$|Z_n \bar{x}|^2 - ||\hat{Z}_n||^2 = \left(\sum_{v=1}^{n-1} z_{n-v+1} x_v \right)^2 \geq 0. \quad (A.12)$$

Consequently

$$||Z_n|| \geq ||\hat{Z}_n||, \quad (A.13)$$

which means

$$\lambda_{\max}^{(n)} \geq \lambda_{\max}^{(n-1)}. \quad (A.14)$$

If we construct the new matrixes

$$Q_n = pI - Z_n \quad (A.15)$$

and

$$\hat{Q}_n = pI - \hat{Z}_n, \quad (A.16)$$

where $p > \lambda_{\max}^{(n)}$, and I denotes the $n \times n$ identity matrix, these matrixes are positively definite. Hence

$$||Q_n|| = p - \lambda_{\min}^{(n)} \quad (A.17)$$

and

$$||\hat{Q}_n|| = p - \lambda_{\min}^{(n-1)} \quad (A.18)$$

Argumenting as above we have

$$||Q_n|| \geq ||\hat{Q}_n|| \quad (A.19)$$

or

$$\lambda_{\min}^{(n)} \leq \lambda_{\min}^{(n-1)} \quad (A.20)$$

We have **thus** proved that the eigenvalues of the matrix Z_n in (A.1) are spread out when n increases.

References

- [1] Lucky R.W., Salz J. & Weldon E.J.
Principles of Data Communication.
New York 1968

- [2] Lucky R.W.
Automatic Equalization for Digital Communication.
Bell System Techn. J.
44 (1965): 4, pp 547 - 588

- [3] Lucky R.W. & Rudin H.R.
An Automatic Equalizer for General-Purpose Communication Channels.
Bell System Techn. J.
46 (1967): 9, pp 2179 - 2208

- [4] Lytle D.W.
Convergence Criteria for Transversal Equalizers.
Bell System Techn. J.
47 (1968): 8, pp 1775 - 1800

- [5] Chang R.W.
A New Equalizer Structure for Fast Start-Up Digital Communication
Bell System Techn. J.
50 (1971): 6, pp 1969 - 2014

- [6] Salomonsson G.
An Equalizer with Feedback Filter.
Ericsson Tech.
28 (1972): 2, pp 57 - 101
- [7] Ericson T.
Structure of Optimum Receiving Filters in Data Transmission Systems.
IEEE Trans. Inform. Theory.
IT-17 (1971): 3, pp 352 - 353
- [8] Forney Jr G.D.
Maximum-Likelihood Sequence Estimation of Digital Sequences in the
Presence of Intersymbol Interference.
IEEE Trans. Inform. Theory
IT-18 (1972): 3, pp 363 - 378
- [9] Ferguson M.J.
Optimal Reception for Binary Partial Response Channels.
Bell System Techn. J.
51 (1972): 2, pp 493 - 505
- [10] Svensson T.
An Adaptive Matched Filter.
Ericsson Tech.
27 (1971): 3, pp 113 - 136

[11] Svensson T.

An Approximation Method for Time Domain Synthesis of Linear Networks.
To appear in IEEE Trans. Circuit Theory
CT-20 (1973): 2

[12] Fröberg C.-E.

Lärobok i Numerisk analys.
Svenska Bokförlaget/Bonniers 1967.

Realisering av en Adaptiv Mottagare för Datatransmission.

av

Tommy Svensson och Göran Salomonsson

Sammanfattning

Denna rapport beskriver konstruktion av och mätningar på en mottagare avsedd för datatransmission. Som modell användes den optimala linjära mottagaren, ett signalanpassat filter följt av ett tidsdiskret filter. Det signalanpassade filtret är utformat som ett ortonormalt filter. En brusanalys för detta presenteras. Det tidsdiskreta filtret är av rekursiv typ. Båda filterna kan justeras automatiskt dels med testpulser, dels adaptivt under transmission av data.

1. Inledning.

Vid transmission av data över en kanal, som är störd av additivt normalfördelat brus, består den optimala mottagaren av ett signalanpassat filter följt av ett periodiskt filter [8], [11]. När överföringsmediet består av telefonnätet, skall båda dessa filter vara adaptivt justerbara för att vara effektiva över den tillgängliga ensemblen av kanaler.

I praktiskt uppbyggda och kommersiellt tillgängliga system ersätts det signalanpassade justerbara filtret med ett fast med motivering att signal-störförhållandet är stort på de använda kanalerna och att ett fast filter ger approximativt samma signal-störförhållande som ett signalanpassat. Det periodiska filtret realiseras oftast med ett transversalfilter [4], [13], [14]. Det signalanpassade filtret ger utöver minimering av bruset även eliminering av kanalens fasdistorsion. Utsignalen blir därför symmetrisk med ett utpräglat maximivärde. Väljes samplingstidpunkterna så att en svarar mot detta maximivärde blir den samplade signalens huvudpuls värdefinierad [6].

Rapporten beskriver en mottagare uppbyggd enligt principen i figur 1.1. Både det signalanpassade filtret och det periodiska filtret, utjämnaren, kan justeras automatiskt antingen genom att sända testpulser dvs enskilda datapulser eller adaptivt under datasändning.



Figur 1.1. Principen för den uppbyggda mottagaren.

De i figur 1.1 införda signalbeteckningarna hänför sig till testpulsinställning. Vid adaptiv inställning är den inkommande signalen

$$\sum_n \gamma_n x(t-nT_0) \quad (1.1)$$

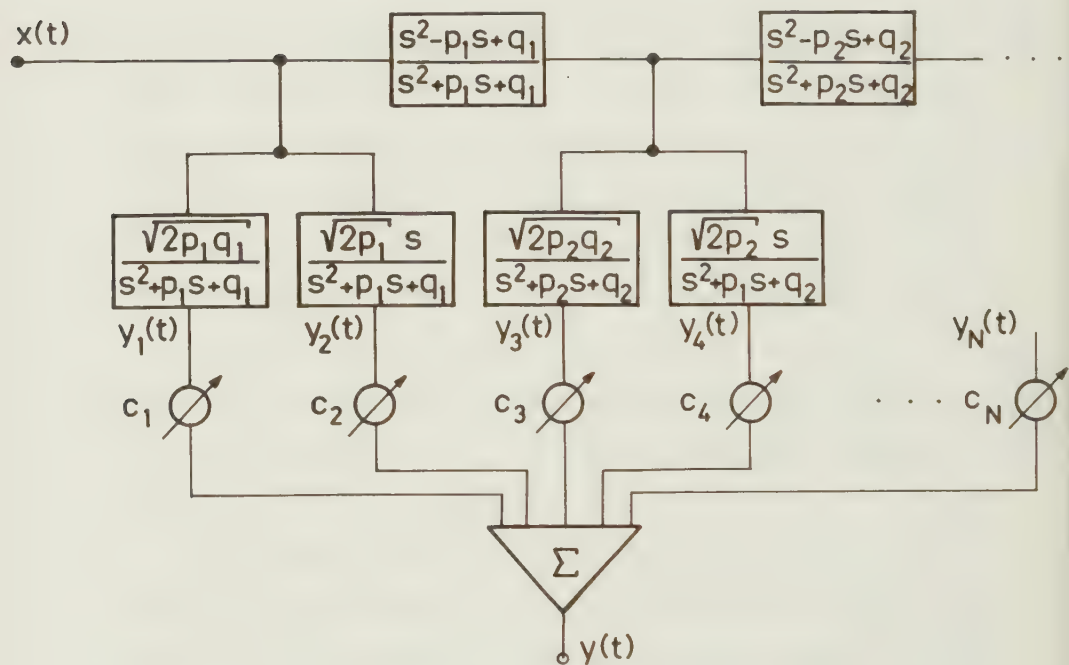
där γ_n är datasymbolerna valda från ett L-symbol alfabet. Storheten $f_s = 1/T_0$ är symbolhastigheten.

Förutom att ett signalanpassat filter ingår i mottagaren skiljer den sig från de kommersiella systemen även i avseende på det periodiska filtret. Detta har nämligen realiserats som ett rekursivt filter.

2. Signalanpassat filter.

2.1 Funktion.

Då kanalens karakteristik ej är känd i mottagaren, måste det signalanpassade filtret göras variabelt på sådant sätt att det kan ställas in med hjälp av dess insignal. Vi ger därför filtret N fria parametrar $c_1, \dots, c_N$ i ett nät [7], vars struktur framgår av Figur 2.1. Ett sådant filter kallar vi ett ortonormalt filter.



Figur 2.1 Det ortonormala filtret.

Anledningen till detta är att om insignalen är en impuls $x(t) = \delta(t)$, erhåller vi signalerna $y_k(t) = \phi_k(t)$ $k = 1, \dots, N$, vilka är ortonormala.

dvs

$$\int_0^{\infty} \phi_k(t) \phi_l(t) dt = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (2.1)$$

Filtrets totala impulssvar kan således skrivas

$$h(t) = \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(t) \quad (2.2)$$

Ekvation (2.2) kan uppfattas som en trunkerad ortonormal utveckling. Om $x(t)$ på filtrets ingång svarar mot en isolerad testpuls, skall det signalanpassade filtret ha impulssvaret

$$h_m(t) = x(T-t) \quad (2.3)$$

För att få ett kausalt filter har vi i (2.3) infört en fördröjning T så vald, att $x(t)$ har sin huvudsakliga energi i intervallet $t \leq T$. Om $x(t)$ är insignal till filtret, erhåller vi på de olika utgångarna vid tidpunkten $t = T$

$$y_k(T) = \int_0^{\infty} x(T-t) \phi_k(t) dt, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.4)$$

Om $h_m(t)$ i (2.3) utvecklas i de ortonormala funktionerna $\phi_k(t)$ $k = 1, \dots, N$ enligt (2.2), finner vi, att koefficienterna blir

$$c_k = y_k(T), \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.5)$$

Filtret kan tydligen ställas in på följande sätt. Sändaren skickar en testpuls över kanalen. Signalerna på det ortonormala filtrets N olika

utgångar samplas vid $t = T$. Dessa värden lagras och användes som koefficienter i filtret.

Då den ortonormala utvecklingen i (2.2) är trunkerad, måste vi fordra att utvecklingen konvergerar snabbt för att (2.2) skall vara en möjlig approximation av (2.3). Detta innebär att ortonormala filtrets poler måste väljas med hänsyn till den klass kanaler det är avsett för [9].

Om dataöverföringssystemet använder modulation, kan översändandet av en isolerad testpuls välla synkroniseringsproblem. Det är därför värdefullt om det ortonormala filtret kan ställas in med hjälp av en längre datasekvens. Värde av en adaptiv inställningsmöjlighet motiveras också av det faktum, att karakteristiken för en telefonkanal kan variera under en uppkoppling.

Då data med frekvensen $1/T_0$ sändes över kanalen, blir insignalen till det ortonormala filtret

$$X(t) = \sum_v \gamma_v x(t-vT_0) \quad (2.6)$$

Den information som skall överföras representeras i (2.6) med amplitudnivåerna γ_v (PAM). Dessa nivåer antages vara statistiskt oberoende med medelvärdet noll och

$$E\{\gamma_v \gamma_\mu\} = \begin{cases} \sigma_Y^2 & \mu = v \\ 0 & \mu \neq v \end{cases} \quad (2.7)$$

På det ortonormala filtrets olika utgångar får signalerna utseendet

$$Y_k(t) = \sum_v \gamma_v y_k(t-vT_0), \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.8)$$

Om hänsyn även tages till brusets inverkan, adderas till (2.8) en brusterm $n_k(t)$. Bruset förutsättes vara vitt med spektraltätheten R_0 på ortonormala filtrets ingång.

Multiplikerar vi signalen på ortonormala filtrets k :te utgång med y_μ vid tidpunkten $t = \mu T_0 + T$ och bildar det aritmetiska medelvärdet över M konsekutiva värden på μ , får vi

$$Q_k = \frac{1}{M} \sum_{\mu=M_0}^{M_0+M} y_\mu [y_k(\mu T_0 + T) + n_k(\mu T_0 + T)] \quad (2.9)$$

Man kan visa [7] att Q_k har medelvärdet

$$E\{Q_k\} = \sigma_Y^2 y_k(T) = \sigma_Y^2 c_k \quad (2.10)$$

och variansen

$$V\{Q_k\} = \frac{1}{M} [(V\{y_\mu^2\} + \sigma_Y^4 [B_k + D_k]) y_k(T)^2 + \sigma_Y^2 R_0] \quad (2.11)$$

I (2.11) gäller relationerna

$$D_k = \frac{1}{y_k(T)^2} \sum_{v \neq 0} y_k(v T_0 + T)^2 \quad (2.12)$$

och

$$B_k \leq D_k \quad (2.13)$$

För att få en enklare realisering har vi modifierat (2.9) och ersätter y_μ med dess tecken

$$Q'_k = \frac{1}{M} \sum_{\mu=M_0}^{M_0+M} \text{sign}(Y_\mu) [Y_k(\mu T_0 + T) + n_k(\mu T_0 + T)] \quad (2.14)$$

Med beräkningar analoga med dem, som användes för beräkning av (2.10) och (2.11), får vi

$$E\{Q'_k\} = E\{|Y_\mu|\} y_k(T) = E\{|Y_\mu|\} c_k \quad (2.15)$$

och

$$V\{Q'_k\} = \frac{1}{M} [(\sigma_Y^2 (1 + D_k) + E\{|Y_\mu|\}^2 (B_k - 1)) y_k(T)^2 + R_0] \quad (2.16)$$

Vi kan således få en medelvärdesriktig skattning av koefficienten c_k ur Ekvation (2.14). Värdet på M , som ger tillräckligt liten varians, kan beräknas ur (2.16).

2.2 Realisering.

Det ortonormala filtret i Figur 2.1 realiserades med hjälp av kretsar med operationsförstärkare enligt Figur 2.2. Analys av nätet i Figur 2.2 ger följande överföringsfunktioner:

$$\frac{Z_1(s)}{U(s)} = - \frac{\frac{R_3 R_4}{R_1 D_5}}{W(s)} \quad (2.17)$$

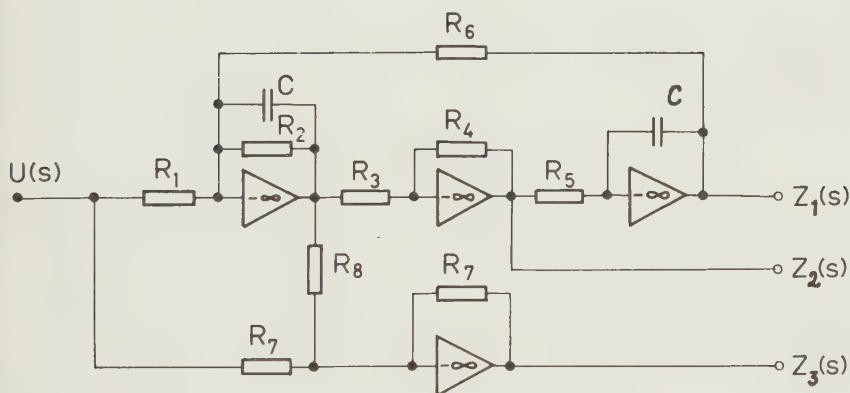
$$\frac{Z_2(s)}{U(s)} = \frac{\frac{R_4}{R_1} s R_3 C}{W(s)} \quad (2.18)$$

och

$$\frac{Z_3(s)}{U(s)} = - \frac{(sR_3C)^2 - \left(\frac{R_3 R_7}{R_1 R_8} - \frac{R_3}{R_2}\right) + \frac{R_3 R_4}{R_5 R_6}}{W(s)} \quad (2.19)$$

med

$$W(s) = (sR_3C)^2 + \frac{R_3}{R_2} sR_3C + \frac{R_3 R_4}{R_5 R_6} \quad (2.20)$$



Figur 2.2 Realisering av en ortonormal filtersektion.

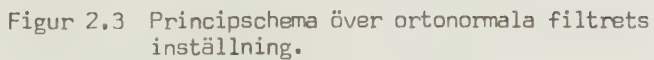
Vi väljer $\omega_0 = 1/(R_3C)$ som normeringskonstant och kan då identifiera överföringsfunktionerna med motsvarande funktioner i Figur 2.1.

Detta ger

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_3}{R_2} &= p_v \\ \frac{R_3 R_4}{R_5 R_6} &= q_v \\ \frac{R_3 R_4}{R_1 R_5} &= \sqrt{2p_v q_v} \\ \frac{R_4}{R_1} &= \sqrt{2p_v} \\ \frac{R_3 R_7}{R_1 R_8} &= 2p_v \end{aligned} \right\} \quad v = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

Minustecknen i (2.17) och (2.19) saknar betydelse, ty om följderna $\{\phi_v(t)\}_{v=1}^N$ är ortonormala, behåller följderna denna egenskap om några $\phi_v(t)$ byter tecken.

Fyra filtersektioner som den i Figur 2.2 användes i realiseringen. Vi har således $N = 8$. Hur inställningen av filtret går till framgår av Figur 2.3. Under en testperiod står omkopplaren A i läge "test". Då omkopplaren B står i läge "sekvens" skall en i mottagaren känd sekvens utsändas från sändaren. Filtrets olika utgångar samplas vid tidpunkterna $t = \mu T_0 + T$, och beroende på tecknet på γ_μ kommer de samplade värdena att tillföras RC-kretsarna genom FET-grindarna med antingen positivt eller negativt tecken. RC-kretsarna tjänstgör som medelvärdesbildare och spänningarna på deras utgångar utgör filtrets koefficienter.



Användes testpulsinställning står omkopplare B i läge "puls". Endast de övre FET-grindarna är nu öppna och släpper genom de vid $t = T$ samplade värdena av utgångarna, som således utgör koefficienternas värde.

Då filtret ställt in sig slås omkopplare A över i läge "data", varefter okända data kan mottagas. Adaptionen fungerar nu som vid test med känd sekvens med undantag av att tecknet på γ_μ bestäms med hjälp av signum-detektorn.

2.3 Inverkan av brus.

Det signalanpassade filtrets huvudsakliga funktion i härledningen av den optimala linjära mottagaren är att minimera inverkan av bruset. Då filtret justeras automatiskt med hjälp av den inkommande signalen, kommer bruset att inverka på inställningen. Vi skall nu undersöka karaktären av denna inverkan.

2.3.1 Testpulsinställning.

I det brusfria fallet erhöill vi filtrets koefficienter enligt Ekvation (2.5). Om förutom signalen $x(t)$ även vitt brus $n(t)$ med spektraltätheten R_0 anländer till mottagaren, får vi istället

$$\hat{c}_k = \int_0^{\infty} [x(T-t) + n(T-t)] \phi_k(t) dt = c_k + e_k \quad (2.22)$$

Medelvärde av e_k är lika med noll och

$$\begin{aligned}
 E\{e_k e_l\} &= E\left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} n(T-t) n(T-s) \phi_k(t) \phi_l(s) dt ds \right\} = \\
 &= R_0 \int_0^{\infty} \phi_k(t) \phi_l(t) dt = \begin{cases} R_0 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Till koefficienten c_k adderas således en stokastisk variabel e_k med medelvärde noll och variansen $\sigma_e^2 = R_0$. Brusvariablerna vid filtrets olika utgångar är dessutom oberoende. Med koefficienterna $\hat{c}_k, k = 1, \dots, N$ får vi ortonormala filtrets impulssvar

$$\hat{h}(t) = \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(t) + \sum_{k=1}^N e_k \phi_k(t) \quad (2.24)$$

Vi inför beteckningarna

$$E_x = \sum_{k=1}^N c_k^2 \quad (2.25)$$

$$E_e = \sum_{k=1}^N e_k^2 \quad (2.26)$$

E_x är filtrets utsignal vid $t = T$ då brus e_j är närvarande, medan E_e är en stokastisk variabel, som på grund av att de ingående termerna är oberoende får medelvärde

$$E\{E_e\} = N E\{e_k^2\} = N \sigma_e^2 \quad (2.27)$$

Vi skall nu undersöka hur signal-brusförhållandet påverkas av att koefficienterna har ändrats. Låt insignalen till filtret vara $x(t) + n(t)$. Vid tidpunkten $t = T$ erhålles utsignalen

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} [x(T-t) + n(T-t)] \left[\sum_{k=1}^N (c_k + e_k) \phi_k(t) \right] dt = \\
& = \sum_{k=1}^N (c_k + e_k) \int_0^{\infty} x(T-t) \phi_k(t) dt + \\
& + \sum_{k=1}^N (c_k + e_k) \int_0^{\infty} n(T-t) \phi_k(t) dt = \\
& = E_x + \sum_{k=1}^N e_k c_k + \hat{n}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

där bruskomponenten $\hat{n}$ har medelvärde noll och variansen

$$\begin{aligned}
\sigma_{\hat{n}}^2 &= E\{\hat{n}^2\} = \\
&= E\left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^N (c_k + e_k) (c_{\ell} + e_{\ell}) \int \int n(T-t) n(T-s) \phi_k(t) \phi_{\ell}(s) dt ds \right\} = \\
&= R_0 \sum_{k=1}^N (c_k + e_k)^2 = R_0 [E_x + E_e + 2 \sum_{k=1}^N e_k c_k]
\end{aligned} \tag{2.29}$$

På filtrets utgång får vi signal-brusförhållandet

$$\begin{aligned}
\text{SNR} &= \frac{(E_x + \sum_{k=1}^N e_k c_k)^2}{\sigma_{\hat{n}}^2} = \\
&= \frac{E_x}{R_0} \frac{\left[1 + \frac{1}{E_x} \sum_{k=1}^N c_k e_k \right]^2}{1 + \frac{2}{E_x} \sum_{k=1}^N e_k c_k + \frac{E_e}{E_x}}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Vi antar nu dels att $\sigma_e^2 \ll E_x$ och dels att $N > 1$. Vi kan då uppskatta (2.30) genom att serieutveckla nämnaren och endast ta med de mest signifikanta termerna. Detta ger

$$\text{SNR} \approx \frac{E_x}{P_0} \left[1 - \frac{E_e}{E_x} + \frac{1}{E_x^2} \left(\sum_k c_k e_k \right)^2 \right] \quad (2.31)$$

Vi beräknar nu medelvärdet och variansen av SNR över alla tänkbara e_k .
 Enär

$$E\left\{\left(\sum_k c_k e_k\right)^2\right\} = \sum_k \sum_l c_k c_l E\{e_k e_l\} = \sigma_e^2 E_x \quad (2.32)$$

erhåller vi med hjälp av (2.27) och (2.31)

$$E\{\text{SNR}\} \approx \frac{E_x}{R_0} \left[1 - \frac{\sigma_e^2}{E_x} (N-1) \right] = \frac{E_x}{R_0} - N + 1 \quad (2.33)$$

Efter något räknearbete, presenterat i Appendix A, får vi variansen

$$V\{\text{SNR}\} \approx \left(\frac{E_x}{R_0}\right)^2 \cdot \frac{\sigma_e^4}{E_x^2} \cdot 2(N-1) = 2(N-1) \quad (2.34)$$

Ur ekvationerna (2.33) och (2.34) ser vi, att medelvärdet och variansen av signal-brusförhållandet minskar respektive ökar linjärt med antalet koefficienter i det ortonormala filtret. Det är därför ur brussynpunkt viktigt att filtrets poler är valda så att en snabb konvergens av (2.2) kan erhållas, vilket innebär att gradtalet på filtret kan hållas nere.

I analysen hittills har vi antagit att filtret ställer in sig efter en enda testpuls. Om bruset är besvärande, kan dess inverkan på inställningen reduceras genom att koefficienterna beräknas genom medelvärdes-

bildning över flera testpulser. Vi antar att koefficienterna bestämmas ur M testpulser, vilka är så separerade i tiden, att brussamplerna vid varje utgång är okorrelerade. Filtrets k :te koefficient blir då

$$\hat{c}_k' = c_k + e_k' \quad (2.35)$$

där e_k' har formen

$$e_k' = \frac{1}{M} \sum_{v=1}^M e_k^{(v)} \quad (2.36)$$

För e_k' gäller

$$E\{e_k'\} = 0 \quad (2.37)$$

och

$$E\{e_k'^2\} = \sigma_e'^2 = \frac{R_0}{M} \quad (2.38)$$

Ersätter vi σ_e med σ_e' i ekvationerna (2.33) och (2.34) får vi

$$E\{\text{SNR}\} \approx \frac{E_x}{R_0} - \frac{N-1}{M} \quad (2.39)$$

och

$$V\{\text{SNR}\} \approx \frac{2(N-1)}{M} \quad (2.40)$$

Ur de båda sista relationerna kan vi beräkna hur många testpulser, som fordras för önskad prestanda vid givna värden på E_x och R_0 . Vi observerar slutligen att den använda approximationen i ekvation (2.31) blir bättre ju större värdet på M är, ty kravet på en god uppskattning är nu $R_0 \ll ME_x$.

2.3.2 Adaptiv inställning.

När det ortonormala filtret inställs adaptivt, måste mottagaren enligt ekvation (2.14) ha information om den sända datasekvensen. Då denna är okänd i mottagaren användes uppskattningen $\{\beta_\mu\}$, som görs av signumdetektorn i Figur 2.3. Om ögondiagrammet vid filtrets utgång är öppet, och brus ej är närvarande, blir $\beta_\mu = \text{sign}(\gamma_\mu)$, och filtrets koefficienter får värden enligt (2.15). Bruset på filtrets utgång gör emellertid att detektorn ibland gör felaktiga beslut, dvs $\beta_\mu \neq \text{sign}(\gamma_\mu)$ för vissa värden på μ . Intersymbolinterferensen på utgången av filtret medför att β_μ och γ_ν då ej är oberoende för alla $\nu \neq \mu$. Detta medför att koefficienterna får andra värden än de ideala. Om intersymbolinterferensen och bruset är stora, kan ändringen av koefficienterna medföra en ökad intersymbolinterferens och därmed ökad sannolikhet för fel beslut. Resultatet kan bli att inställningen divergerar. Att helt bestämma för vilka system detta inträffar är ett mycket svårt problem. Vi inskränker oss därför till att göra uppskattningar i de ekvationer, som beskriver inställningen.

I det följande antar vi att systemet är binärt dvs γ_μ (och β_μ) kan med lika sannolikhet anta värdena +1 och -1. Beräkningarna kan emellertid utvidgas till att gälla system med godtyckligt antal nivåer. Vi antar dessutom att värdet på M i ekvation (2.14) är så stort att det aritmetiska medelvärdet i denna ekvation kan ersättas med det statistiska.

Filtrets k:te koefficient fås då ur

$$\begin{aligned}\hat{c}_k &= E\{\beta_\mu \left[\sum_v \gamma_v y_k [(\mu-v)T_0 + T] + n_k(\mu T_0 + T) \right]\} = \\ &= \sum_v E\{\beta_\mu \gamma_v\} y_k [(\mu-v)T_0 + T]\end{aligned}\quad (2.41)$$

där

$$\beta_\mu = \text{sign}\left\{ \sum_{k=1}^N \hat{c}_k \left[\sum_v \gamma_v y_k [(\mu-v)T_0 + T] + n_k(\mu T_0 + T) \right] \right\} \quad (2.42)$$

Medelvärdet i ekvation (2.41) kan vi skriva på formen

$$\begin{aligned}E\{\beta_\mu \gamma_v\} &= \\ &= (+1) [P\{\gamma_v = 1\} P\{\beta_\mu = 1 | \gamma_v = 1\} + P\{\gamma_v = -1\} P\{\beta_\mu = -1 | \gamma_v = -1\}] + \\ &+ (-1) [P\{\gamma_v = 1\} P\{\beta_\mu = -1 | \gamma_v = 1\} + P\{\gamma_v = -1\} P\{\beta_\mu = 1 | \gamma_v = -1\}]\end{aligned}\quad (2.43)$$

Vi inför beteckningen

$$p_{v\mu} = P\{\beta_\mu = 1 | \gamma_v = 1\} = P\{\beta_\mu = -1 | \gamma_v = -1\} \quad (2.44)$$

Med (2.44) insatt i (2.43) får vi

$$E\{\beta_\mu \gamma_v\} = 2p_{v\mu} - 1 \quad (2.45)$$

och (2.41) kan då skrivas

$$\hat{c}_k = \sum_{\nu} (2p_{\nu\mu} - 1) y_k [(u-\nu)T_0 + T] \quad (2.46)$$

Subtraherar vi den term i (2.46), som representerar koefficienten c_k , får vi felet

$$\begin{aligned} e_k &= \hat{c}_k - E\{B_{\mu} Y_{\mu}\} y_k(T) = \\ &= \sum_{\nu \neq \mu} (2p_{\nu\mu} - 1) y_k [(u-\nu)T_0 + T] \end{aligned} \quad (2.47)$$

och för felets absolutbelopp gäller

$$|e_k| \leq \max_{\nu \neq \mu} |2p_{\nu\mu} - 1| \sum_{\nu \neq \mu} |y_k [(u-\nu)T_0 + T]| \quad (2.48)$$

Låter vi $\bar{e}$ och $\bar{c}$ beteckna vektorerna vars element är e_k respektive c_k gäller

$$\frac{|\bar{e}|}{|\bar{c}|} \leq \frac{\max_{\nu \neq \mu} |2p_{\nu\mu} - 1|}{2p_{\mu\mu} - 1} \cdot R \quad (2.49)$$

där $|\cdot|$ betecknar absolutnormen och R är en konstant bestämd av de brusfria sampelvärdena på ortonormala filtrets utgångar.

$$R = \sum_{\nu \neq \mu} \frac{\sum_{k=1}^N |y_k [(u-\nu)T_0 + T]|}{\sum_{k=1}^N |y_k(T)|} \quad (2.50)$$

Faktorn

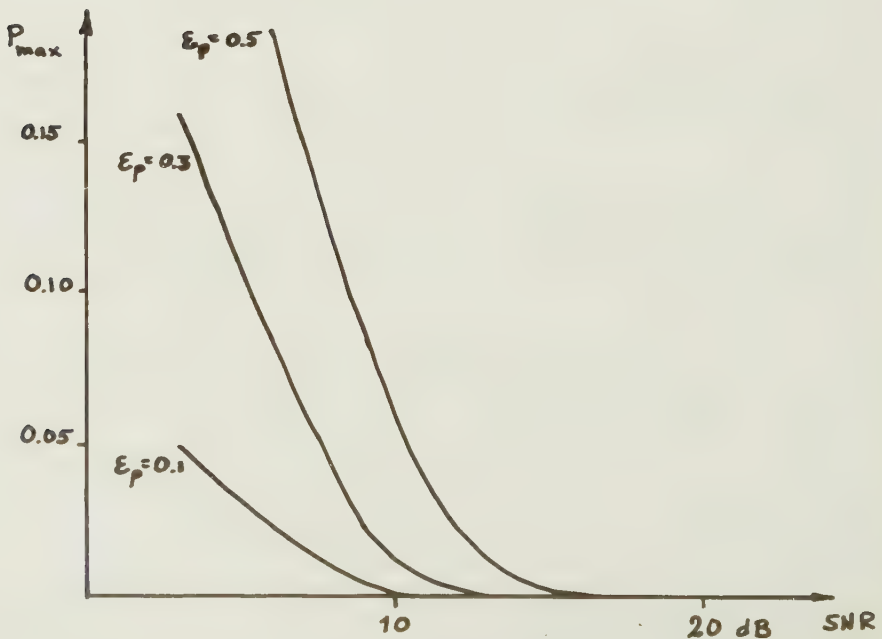
$$P = \frac{\max_{\nu \neq \mu} |2p_{\nu\mu} - 1|}{2p_{\mu\mu} - 1} \quad (2.51)$$

är beroende på intersymbolinterferensen och bruset på filtrets utgång. För ett givet värde ϵ_p på maxdistorsionen kan vi ange en övre gräns till P , visad i Appendix B

$$P_{\max} = \frac{\Phi[(1 + \epsilon_p)\xi] - \Phi[(1 - \epsilon_p)\xi]}{\Phi[(1 + \epsilon_p)\xi] + \Phi[(1 - \epsilon_p)\xi] - 1} \quad (2.52)$$

där ξ^2 är signal-brusförhållandet på ortonormala filtrets utgång och $\Phi(x)$ är fördelningsfunktionen för den standardiserade normalfördelningen.

I Figur 2.4 kan vi studera $P_{\max}$ som funktion av signal-brusförhållandet (SNR) med maxdistorsionen som parameter.



Figur 2.4 $P_{\max}$ som funktion av signal-brusförhållandet.

Typiskt för kurvorna i figuren är att $P_{\max}$ har ett mycket lågt värde för stora SNR, men ökar mycket snabbt med avtagande SNR då detta underskridit ett visst kritiskt värde. Om filtret inte är speciellt känsligt för parametervariationer (extremt höga Q-värden på polerna), kommer distorsionen inte att öka nämnvärt på grund av bruset så länge vi befinner oss över det kritiska värdet och risken för divergens är således liten. Vid avtagande SNR under det kritiska värdet kan ökningen av koefficienternas fel medföra en ökning av distorsionen med brantare kurvor än de i figuren som följd. Mätningar i kapitel 4 bekräftar detta.

3. Periodiskt filter

3.1 Val av utjämnare och inställningsalgoritm.

Utsignalen $y(t)$ från det signalanpassade filtret samplas periodiskt med symbolhastigheten $f_s = 1/T_0$. När en enskild datapuls sänds, testpuls, får vi kanalen karakteriserad av följderna $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ med $y_k = y(kT)$. Motsvarande Z-transform betecknas med $Y(z)$ och är definierad av

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} \quad (3.1)$$

Vi förutsätter att summan i (3.1) konvergerar mot en rationell funktion. Ekvation (3.1) anger således serieutvecklingen omkring $z^{-1} = 0$ [12] dvs

$$Y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (3.2)$$

Polynomen $P(z)$ och $Q(z)$ antages ha ändligt gradtal. Med $Q(z) = 1$ får vi specialfallet att (3.1) är ett ändligt polynom.

Polerna till (3.2) ligger i $|z| < 1$ eftersom strikt stabilitet är ett självklart krav på systemet. Nollställena tillåts däremot i hela Z-planet, utom på enhetscirkeln. Faktorisera $P(z)$ i

$$P(z) = F(z) \cdot G(z) \quad (3.3)$$

så att faktorn

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n_1} f_k z^{-k} \quad (3.4)$$

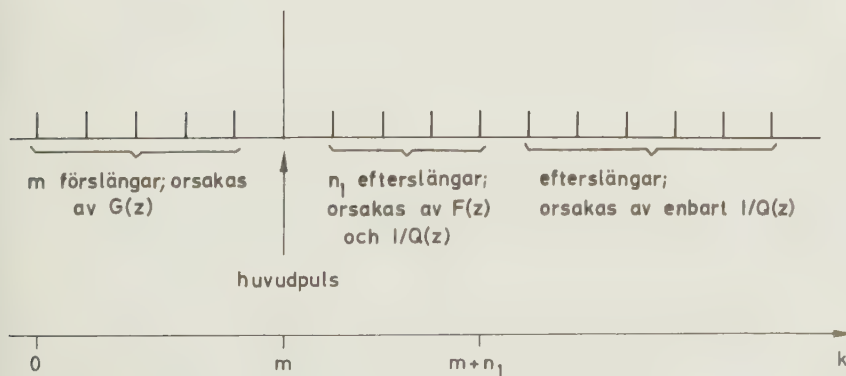
har samtliga nollställen z_{1v} , $v = 1, \dots, n_1$ i $|z| < 1$ och faktorn

$$G(z) = \sum_{k=0}^m g_k z^{-k} \quad (3.5)$$

har samtliga nollställen z_{2v} , $v = 1, \dots, m$ i $|z| > 1$.

Närmast skall vi undersöka vilka samplevärden y_k de tre faktorerna $G(z)$, $F(z)$ och $1/Q(z)$ orsakar. Låter vi $F(z) = Q(z) = 1$ blir $y_k = g_k$ given av (3.5). Vi får m stycken samplevärden och man kan visa att g_m kan betraktas som huvudpuls. Faktorn $G(z)$ orsakar förslängarna. På samma sätt finner man att $F(z)$ orsakar n_1 efterslängar och $1/Q(z)$ oändligt många efterslängar. Självklart påverkar däremot alla tre faktorerna storleken av varje samplevärde y_k .

Figur 3.1 sammanfattar vilka faktorer i (3.2), som orsakar för- och efterslängar hos den mottagna följd $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$



Figur 3.1 Den samplade signalen.

Storheten m , antalet förslängar, kommer i det följande att spela en dominerande roll för bestämning av huvudpulsens läge. I det allmänna fallet är det svårt att ur en given insignal bestämma m . För de två specialfall, som vi betraktar, nämligen insignalen har binärt öppet öga och insignalen är utsignal från ett signalanpassat filter, gäller att m är den sampletidpunkt, som ger störst samplevärde dvs

$$|y_m| > |y_v| \quad \forall \neq m.$$

Vi vill nu bestämma ett linjärt periodiskt filter så att utsignalen $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ approximerar en given önskad signal $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$, när $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ är insignal. I det fall, som vi skall studera, vill vi att den önskade signalen ej har någon intersymbolinterferens. Då gäller

$$d_k = \begin{cases} 1 & k = M \\ 0 & k \neq M \end{cases} \quad (3.6)$$

och vi skall senare relatera M till kanalens och utjämnarens egenskaper. Z-transformen till (3.6) är

$$D(z) = z^{-M} \quad (3.7)$$

Det periodiska filtrets överföringsfunktion karakteriseras av $E(z)$. In-utsignalrelationen uttrycks i Z-planet av

$$U(z) = Y(z) \cdot E(z) \quad (3.8)$$

där $U(z)$ är utsignalens Z-transform. I idealfallet gäller $U(z) = D(z)$ och vi får ur (3.8) med användning av (3.2) och (3.3)

$$E_1(z) = \frac{Q(z)}{F(z)} \cdot \frac{D(z)}{G(z)} \quad (3.9)$$

När $G(z) \neq \text{konst}$ följer av det föregående att konvergensregionen till (3.9) kan definieras som en cirkelskiva innehållande $|z| = 1$. Systemet (3.9) är därför ej kausalt. För att erhålla ett sådant system approximeras faktorn $D(z)/G(z)$ med ett polynom genom serieutveckling omkring $z = 0$. Med (3.7) insatt får vi

$$\frac{z^{-M} z^m}{z^m G(z)} = z^{-(M-m)} [1 + a'_1 z + \dots + a'_l z^l + R(z)] \quad (3.10)$$

där $R(z)$ är restpolynomet med lägsta polens $(l+1)$ och g_m i (3.5) har normerats till $g_m = 1$. Serien (3.10) approximeras med de $(l+1)$ första termerna. Vi får

$$\frac{z^{-M}}{G(z)} \approx a'_l + a'_{l-1} z^{-1} + \dots + z^{-l} = A(z) \quad (3.11)$$

med sambandet

$$M = l + m \quad (3.12)$$

Den realiserbara utjämnaren $E(z)$ får vi genom insättning av (3.11) i (3.9)

$$E(z) = \frac{Q(z) \cdot A(z)}{F(z)} \quad (3.13)$$

Motsvarande utsignal (3.8) blir

$$U(z) = G(z) \cdot A(z) \quad (3.14)$$

Med $A(z)$ definierad av (3.11) blir utsignalens samplevärden u_k skilda från noll för $0 \leq k < m$ men kan göras godtyckligt små om M väljes tillräckligt stort, lika med noll för $m \leq k < M$ och $u_M = 1$ samt noll för $k > M$ [5]. Utjämnaren är således ideal, oberoende av kriterium, i den mening att samtliga efterslängar elimineras. Vidare finner vi att utsignalens huvudpuls (3.12) bestäms dels av utjämnaren genom l dels av kanalen genom m .

Polynomet $A(z)$ i (3.13) behöver självfallet ej väljas enligt (3.11). Det naturliga skulle snarast vara att välja koefficienterna så att ett givet kriterium minimeras. I detta sammanhang vanliga kriterier är kvadratkriteriet

$$\epsilon^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k - d_k)^2 \quad (3.15)$$

och maxdistorsionen

$$\epsilon_p = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k - d_k| \quad (3.16)$$

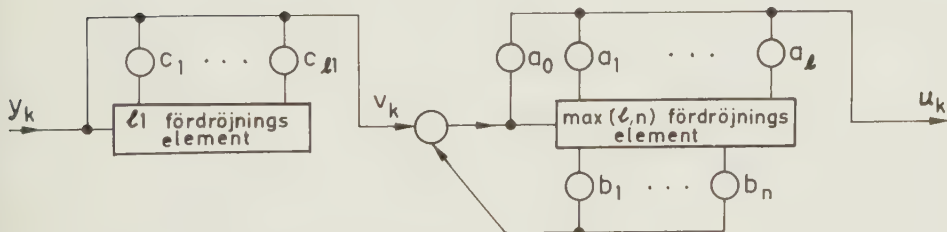
Man finner emellertid att (3.11) alltid ger en god lösning [3]. När insignalen har öppet binärt ögonogram, medför (3.11) dessutom minimering av (3.16).

Utgämnaren (3.13) är härledd under förutsättning att kanalens impuls-svar är känd. Kanalen väljes emellertid stokastiskt ur en ensemble av kanaler. För att utjämnaren skall vara effektiv för alla kanaler krävs att dess parametrar är justerbara och vi karakteriserar den med

$$E(z) = \frac{C(z) A(z)}{B(z)} = \frac{(1+c_1z^{-1}+\dots+c_{l1}z^{-l1}) (a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_{l2}z^{-l2})}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}-\dots-b_nz^{-n}} \quad (3.17)$$

där koefficienterna a_v , b_v och c_v är adaptivt inställbara. Dessutom är gradtalen fixerade, som angives i (3.17).

Utgjennaren (3.17) kan realiseras med ett transversalfilter, som representerar $C(z)$, i kaskad med ett rekursivt filter som representerar $\frac{A(z)}{B(z)}$. Figur 3.2 visar realiseringen och där är även signalerna angivna. Signalen $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ har samma karaktär som $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ i figur 3.1.



Figur 3.2 Principrealisering av utgennaren (3.17).

På grund av eventuellt begränsat gradtal hos utgennarens faktorer kan $C(z)$ och $B(z)$ inte alltid väljas idealt enligt (3.13). Parametrarna a_v , b_v och c_v får då väljas så att något av kriterierna (3.15) eller (3.16) minimeras.

Av det tidigare framgår att $B(z)$ skall utjämna de n första efter-
slängarna $u_k, M < k \leq M+n$ och att $C(z)$ skall utjämna de övriga. För
inställning av c_v använder vi därför förlustfunktionen

$$\epsilon_1^2 = \sum_{k=m+n+1}^{\infty} v_k^2 \quad (3.18)$$

och en iterativ inställningsalgoritm är

$$c_i^{(j+1)} = c_i^{(j)} - \alpha_{j+1} \sum_{k=m+n+1}^{\infty} v_k y_{k-i} \quad i = 1, \dots, l \quad (3.19)$$

Inställningsalgoritmer för a_v och b_v har härletts för minimering av
(3.15) i [6] och upprepas här

$$a_i^{(j+1)} = a_i^{(j)} - \alpha_{j+1} \sum_{k=0}^M \epsilon_k^{(j)} v_{k-i} \quad i = 0, 1, \dots, l \quad (3.20)$$

$$b_i^{(j+1)} = b_i^{(j)} - \alpha_{j+1} \epsilon_{M+i}^{(j)} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

Vid minimering av (3.16) blir motsvarande algoritmer

$$a_i^{(j+1)} = a_i^{(j)} - \Delta(\epsilon_{m+i}^{(j)}) \operatorname{sgn}(\epsilon_{m+i}^{(j)}) \quad i = 0, \dots, l \quad (3.22)$$

$$b_i^{(j+1)} = b_i^{(j)} - \Delta(\epsilon_{M+i}^{(j)}) \operatorname{sgn}(\epsilon_{M+i}^{(j)}) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.23)$$

Felet är med (3.6)

$$\epsilon_k = u_k - d_k = \begin{cases} u_M^{-1} & k = M \\ u_k & k \neq M \end{cases} \quad (3.24)$$

För valet av utjämnare har vi gjort följande överväganden. Eftersom systemet är stabilt gäller $|y_k| < \delta$, $k > N(\delta)$ och (3.1) ersätts av den trunkerade summan

$$Y(z) \approx \sum_{k=0}^{N(\delta)} y_k z^{-k} = F'(z) \cdot G'(z) \quad (3.25)$$

I utjämnaren (3.17) sätter vi $C(z) = 1$

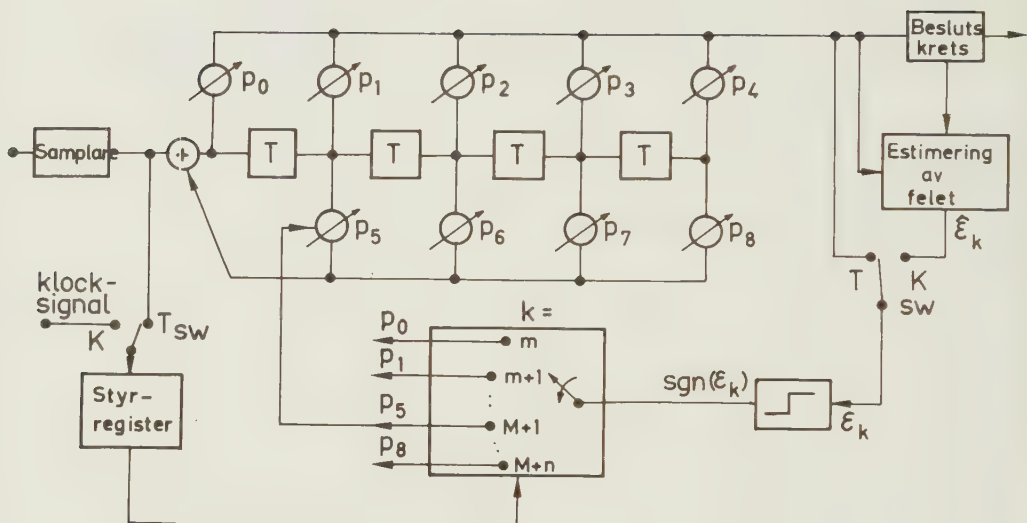
$$E(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_\ell z^{-\ell}}{1 - b_1 z^{-1} - \dots - b_n z^{-n}} \quad (3.26)$$

När gradtalet n för $B(z)$ är större än eller lika med gradtalet n' för $F'(z)$ elimineras samtliga efterslängar i (3.25).

För att förenkla konstruktionen används de enkla inställningsalgoritmerna (3.22) och (3.23) med funktionen $\Delta(\epsilon) = \text{konst.}$

3.2 Utjämnarens funktion.

Figur 3.3 visar principschemat för den uppbyggda utjämnaren. Den består av fyra fördröjningsceller och antalet täljare- och nämnarpotentiometrar är $\ell+1 = 5$ respektive $n=4$. Vid automatisk inställning av dessa med algoritmerna (3.22) och (3.23) är problemet att estimera tecknet hos felet ϵ_k (3.24) för $m \leq k \leq m + \ell + n$, där m tidigare är antalet förslängar hos insignalen. Två fall skall särskiljas. I första fallet sänds testpulser, enskilda datapulser, varvid ϵ_k erhålles genom mätning av utsignalens samplevärden. I andra fallet sänds en dataföljd och ϵ_k estimeras med hjälp av en korrelator.



Figur 3.3 Utjämnarens funktion.

Med figur 3.3 kan inställningen av utjämnaren beskrivas. Vid adaptiv inställning sättes omkopplaren SW i läge K och vid testpulsinställning i läge T, varvid P4 samtidigt ges det konstanta värdet 1 dvs huvudpulsens värde utjämnas ej till 1.

Före utjämnningen nollställes alla fördröjningselementens utgångar och alla potentiometrar utom P4, som ettställes. Vid testpulsinställning samplas signalen, och sampelvärden skiftas in i fördröjningskedjan. Vid öppet binärt öga och när signalen är utsignal från ett signalanpassat filter finns ett största sampelvärde y_m , som bestämmer signalparametern m . Sampelvärdet y_m startar styrregistret, som "pekar ut" potentiometern

P0. Samtidigt befinner sig på utjämnarens utgång den första förslängen u_m , som skall utjämnas och vi kan mäta felet ϵ_m , vars tecken bestäms. Justering av P0 kan därefter ske.

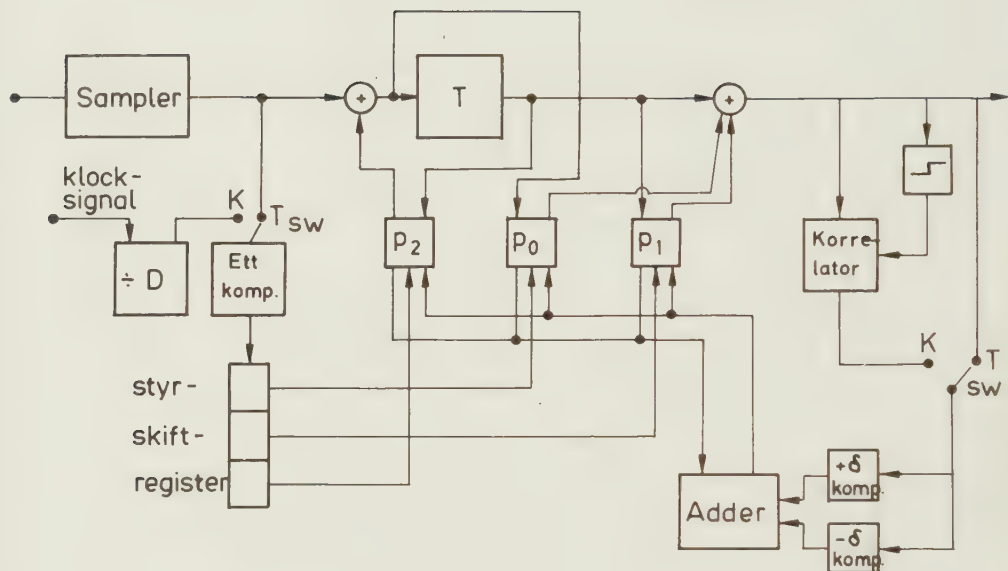
I nästa sampleintervall pekar styrregistret ut P1. På utgången har vi samtidigt samplevärdet u_{m+1} och felet ϵ_{m+1} kan mätas och dess tecken bestämmas. Justering av P1 sker i detta intervall. I nästa sampleintervall justeras P3 osv.

Vid adaptiv inställning ställs omkopplaren SW i läge K, och vi får tillgång till det estimerade felet $\hat{\epsilon}_k$. En senare analys visar att vi nu får även $\hat{\epsilon}_M = (\hat{u}_M - 1)$ och i detta fall varierar även P4. Styrregistret påverkas av klockpulsen.

Inställningen av potentiometrarna sker i serieform dvs samtidigt som ett samplevärde uppträder på utjämnarens utgång justeras motsvarande potentiometer. Detta ger en mindre komponentkrävande realisering.

3.3 Realisering av utjämnaren.

Figur 3.4 visar i blockschemaform realiseringen av utjämnaren. I avsikt att förenkla schemat har endast en fördröjning medtagits.



Figur 3.4 Utjämnarens realisering.

I samplaren samplas insignalen och sampelvärdet fördröjs i fördröjningsnätet. De realiseras med sampel- och hållkretsar (master and slave). Båda arbetar enligt principen return-to-zero dvs samplevärdet hålls endast under en del av sampleintervallet, varefter signalen återgår till noll. Den ursprungliga nollnivån åtföljer därigenom samplet genom fördröjningskedjan [10]. Detta ger fördelen att alla kretsar efter samplaren kan AC-kopplas. Samplaren och fördröjningsnätet realiserar med sampel- och hållkretsar, master and slave principen. Sampel-

värden skiftas längs fördröjningsnätet av klockpulserna. Fördröjningens längd T_0 kan därför enkelt ändras och nätet kan anpassas till olika datahastigheter.

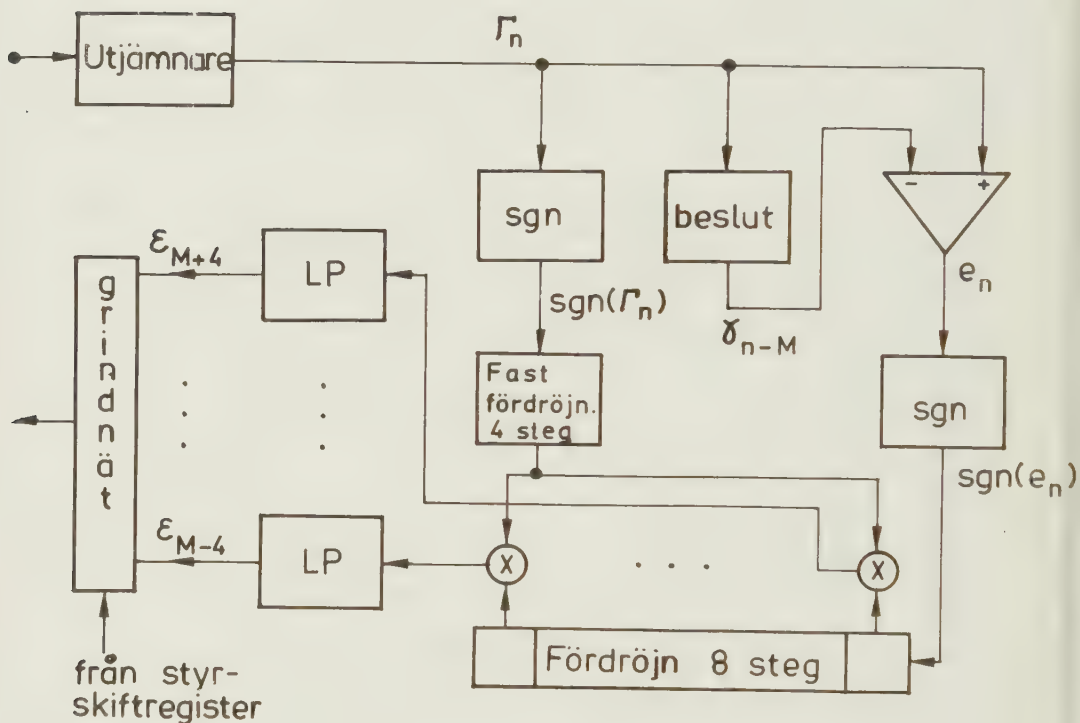
Varje potentiometer består av en dämpsats, som styrs av en D/A-omvandlare. Dess insignal ligger i ett 9 bitars minne, varav 1 bit är teckenbit och övriga 8 bitar innehåller informationen om potentiometers värde. Upplösningen är således 2^{-8} . I varje iterationssteg får det digitala minnet ett nytt värde.

Ändringen av potentiometervärdet sker med hjälp av + δ -komparatorn, - δ -komparatorn och adder. I komparatorerna undersöks om sampelvärdets nivå är större än δ eller mindre än $-\delta$. I förra fallet adderas 1 till potentiometers minsta signifikanta siffra, i senare fallet subtraheras 1. När sampelvärdet är mindre än kvantiseringssteget, $|u_k| < \delta$, sker ingen ändring av potentiometers värde.

Eftersom komparatorerna och addern är gemensam för samtliga potentiometrar krävs en styrkrets, som pekar ut den potentiometer som skall justeras. Denna styrkrets består av ett-komparatorn och ett styrskiftregister. Ett-komparatorn väljer ut insignalens största samplevärde, varvid en etta skiftas in i registrets första position. Övriga positioner är noll. Denna etta skiftas av klockpulserna genom registret. När den befinner sig i $(i+1)$:a positionen öppnas potentiometer P_i . Dess värde skiftas över till addern, där 1, 0 eller -1 adderas till den minst signifikanta siffran. Därefter skiftas det nya värdet tillbaka.

De hittills beskrivna blocken är tillräckligt för automatisk inställning av utjämnaren, när testpulser sänds. För adaptiv inställning under

transmission av en dataföljd krävs dessutom en krets för estimering av felet $\epsilon_k = u_k - d_k$. Detta sker i en korrelatorkrets [2], vars blockschema figur 3.5 visar.



Figur 3.5 Korrelatorn.

Det samplade impulssvaret av kanal och utjämnare betecknas som tidigare med $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$. När informationsföljden $\{\gamma_n\}$ överförs får vi på utjämnarens utgång

$$\Gamma_n = \sum_k \gamma_k u_{n-k} = \gamma_{n-M} u_M + \sum_k \gamma_k u_{n-k} \quad (3.27)$$

där $\sum e_j$ innehåller $k=n-m$. Summan representerar intersymbol-interferensen. Felet e_n bildas

$$e_n = \gamma_{n-M}(u_M - 1) + \sum_k \gamma_k u_{n-k} - \sum_k \gamma_k e_{n-k} \quad (3.28)$$

Såväl r_n som e_n passerar klippkretsar, som bildar funktionerna $\text{sgn}(e_n)$ och $\text{sgn}(r_n)$. Dessa binära signaler fördröjs i skiftregister, varefter de multipliceras. Produkten integreras i LP-filter. I nästa avsnitt sammanfattas analysen av korrelatorkretsen och man finner att LP-filtrens utsignal ger ett estimat av felet

$$\hat{e}_j = \sum_n \text{sgn}(e_n) \text{sgn}(r_{n-j}) \quad (3.29)$$

Genom kontaktnät, som styrs av styrskiftregistret i figur 3.4, ansluts LP-filtrens utgångar successivt till δ -komparatorerna.

Insignal till styrskiftregistret är klockpulser, vars frekvens har dividerats med D . Efter ändring av parametrarna bestäms den nya uppskattningen (3.29) D nya termer och $(\frac{\tau}{T_0} - D)$ gamla, där τ är LP-filtrens stigtid. För att få successiva uppskattningar oberoende av varandra krävs $D \geq \frac{\tau}{T_0}$. Detta leder till långa inställningstider. Valet av D blir därför en kompromiss mellan kort inställningstid och liten korrelation mellan successiva uppskattningar av felet.

3.4 Utjämnarens stabilitets- och brusegenskaper.

3.4.1 Stabilitet.

Genom att återkopplingar ingår i utjämnaren har man ingen garanti för stabilitet, när potentiometrerna justeras enligt algoritm (3.23). Beräkningar har emellertid visat att om polynomet $F(z)$'s (3.4), (3.25) koefficienter f_k uppfyller villkoret

$$\sum_k |f_k| < 1 \quad (3.30)$$

leder den använda algoritmen till ett stabilt system. Mätningar har verifierat detta.

3.4.2 Brusanalys av testpulsinställningen.

Utsignalen från utjämnaren (3.26) är i brusfria fallet

$$u_k = \sum_{v=1}^l a_v y_{k-v} + \sum_{v=1}^n b_v u_{k-v} \quad (3.31)$$

Med inställningsalgoritmerna (3.22) och (3.23) är vi speciellt intresserade av samplevärden u_{m+i} , $i=0, \dots, l+n$.

Ur (3.31) finner vi

$$u_{m+i} = a_i \cdot y_m + a_l \cdot y_{m+i-l} + \sum_{\substack{v \\ v \neq i, l}} a_v y_{m+i-v} + \sum_{v=1}^n b_v u_{m+i-v} \quad (3.32)$$

$$u_{M+i} = b_i u_M + a_l y_{M+i-l} + \sum_{\substack{v \\ v \neq l}} a_v y_{M+i-v} + \sum_{\substack{v \\ v \neq i}} b_v u_{M+i-v} \quad (3.33)$$

Normera $y_m = 1$ och approximera $u_M \approx 1$, $a_\ell \approx 1$. När insignalens max-distorsion är liten kan summorna i (3.32) och (3.33) försummas. Vi får med M givet av (3.12)

$$u_{m+i} \approx a_i + y_{m+i-\ell} \quad (3.34)$$

$$u_{M+i} \approx b_i + y_{m+i} \quad (3.35)$$

Med hjälp av dessa approximationer ser vi att varje potentiometer väsentligen endast påverkar ett samplevärde. Brusanalysen blir därför ekvivalent med brusanalysen för ett transversalfilter, som finns utfört i [1]. Från denna referens sammanfattas att systemdistorsionen $\epsilon_{ps}(\Delta, S/N)$ blir en styckvis linjär funktion i Δ med brytpunkten $\Delta \approx \sigma_s$. (Beteckningar: $\epsilon_{ps} = |u_{m+i}|$, $i = 0, \dots, \ell+n$, signal-brusförhållandet är $S/N = 1/\sigma_s^2$ där σ_s^2 är bruseffekten på utjämnarens utgång.)

3.4.3 Brusanalys av adaptiv-inställningen

Lucky har utfört brusanalys även av korrelatorn i figur 3.5 [2]. Här gör vi endast en kort sammanfattning.

Bilda signalen (jämför (3.28))

$$e_m = \sum_k \gamma_k e_{m-k} + \eta_m \quad (3.36)$$

där ϵ_k är felet, η_m är samplevärdet av bruset och γ_k är binära informationssymboler. Förutsättningarna är att η_m är oberoende normalfördelade variabler med varians σ^2 , datasymbolerna γ_k är okorrelerade med lika sannolikhet samt att felsannolikheten är liten

så att de detekterade datasymbolerna överensstämmer med de sända i de flesta fall.

Beräkna medelvärdet

$$\begin{aligned} E\{\text{sgn}(e_m) \gamma_n\} &= 1\{P(e_m > 0, \gamma_n = 1) + P(e_m < 0, \gamma_n = 1)\} - \\ &\quad - 1\{P(e_m > 0, \gamma_n = -1) + P(e_m < 0, \gamma_n = 1)\} = \\ &= 1 \cdot p - 1 \cdot q \end{aligned} \quad (3.37)$$

där

$$p = P(e_m > 0 \mid \gamma_n = 1) \quad (3.38)$$

och

$$q = P(e_m > 0 \mid \gamma = -1) \quad (3.39)$$

I [2] har (3.38) beräknats och man finner

$$p \approx 0.5 + c \epsilon_{m-n} \quad (3.40)$$

På motsvarande sätt finner man

$$q \approx 0.5 - c \epsilon_{m-n} \quad (3.41)$$

Medelvärdet (3.37) blir således proportionellt mot felet ϵ_{m-n} , dvs LP-filtrens utgångar ger i medel de korrekta värden ϵ_k . Variansen hos utsignalen, som är proportionell mot $p \cdot q = 0.25 - c^2 \epsilon_{m-n}^2$, skall

emellertid vara liten. LP-filtrens tidskonstant bestäms av "värsta fallet" när $|\epsilon_k| < \Delta$.

Ovan har vi antagit att felsannolikheten är så liten att den detekterade och sända signalen kan betraktas som identiska. När detta ej är fallet blir analysen av korrelatorn i figur 3.5 mycket besvärlig (jämför kapitel 2). Intuitivt inses att proportionalitetskonstanten i (3.40) och (3.41) går mot noll. Detta framgår också av (3.38) som blir

$$p = 2P(e_m > 0, \hat{\gamma}_n = 1) = 2P_n(\hat{\gamma}_n = 1) P(e_m > 0) = \frac{1}{2} \quad (3.42)$$

när e_m och $\hat{\gamma}_n$ är oberoende och $\hat{\gamma}_n$ är den beslutade datasymbolen. Som de experimentella resultaten i kapitel 4 visar, arbetar utjämnaren bra även för så låga signal-störförhållanden som 5dB. Inverkan av felaktigt detekterade datapulser på utjämnarens adaptiva inställning blir vid "normal" användning ringa.

4. Mätningar

Det uppbyggda mottagarfiltret har testats dels på experimentella basbandskanaler och dels i förening med ett datamodem på verkliga telefonkanaler. I detta kapitel kommer resultat från sådana tester att presenteras.

Den experimentella kanalen bestod av ett 3:e gradens Butterworth filter följt av fasvridande allpasslänkar. Grupplöptidskarakteristiken för de två kanalerna vi använt framgår av Figur 4.1. Figur 4.2 och 4.3 visar testpulserna före och efter det ortonormala filtret, då dessa två kanaler använts. Resultat från den adaptiva inställningen kan ses i Figur 4.4 och 4.5. Den första kanalens binära ögon före och efter ortonormala filtret visas i Figur 4.4a och b, och efter den rekursiva utjämnaren fås det samplade ögon-diagrammet i 4.4c. Motsvarande ögon-diagram för den andra kanalen kan studeras i Figur 4.5a, b och c. För båda kanalerna gäller att de innan mottagarfiltret har helt slutna binära ögon.

För att kunna testa utjämnarsystemet på telefonledningar, anslöts systemet till ett av televerket lånat datamodem av fabrikat ITT som arbetar med 2400 baud. Då filterna i detta modem har en total amplitud-karakteristik $A(f)$, som approximerar en "raised cos-roll-off"-funktion, måste ett korrektionsnät inkopplas före det ortonormala filtret.

Önskemålet är ju att amplitudkarakteristiken efter det ortonormala filtret skall ha detta utseende. Korrektionsnätet bör därför ha amplitudgången $1/\sqrt{A(f)}$. Denna funktion realiserades approximativt med ett diskantshöjande nät, vars principiella utseende framgår av Figur 4.6.

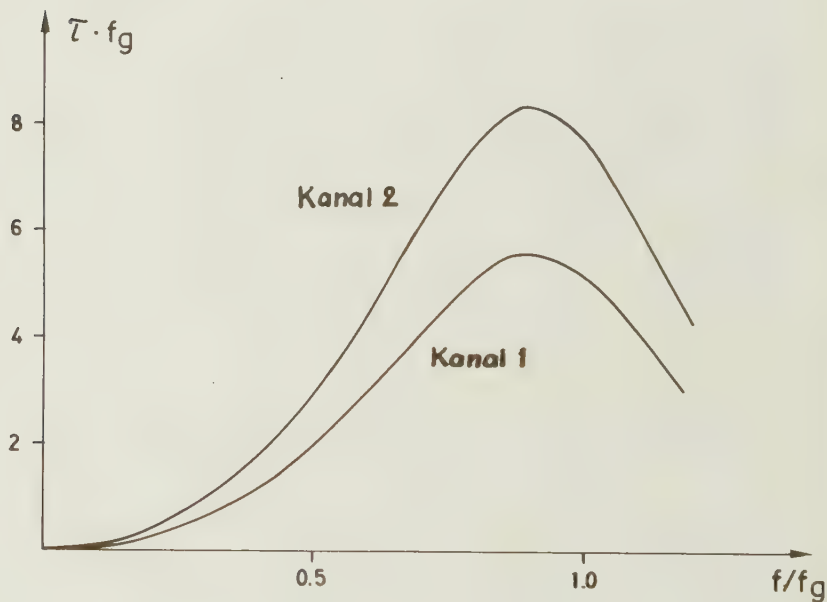
För att kunna bibehålla synkroniseringen måste okorrelerade data överföras. Detta åstadkommes i modemet genom att en "pseudo random" sekvens modulo-adderas till inkommande data i sändaren, och samma sekvens subtraheras i mottagaren. Enskilda testpulser kan därför ej överföras, varför endast adaptiv inställning av filterna kunde tillämpas. Vi har inte försökt att hitta optimala pollägen till det ortonormala filtret utan polerna valdes i enlighet med ett åttonde gradens Butterworth filter. Figur 4.7a visar det binära ögat i modemet för en viss ledning. Som synes är detta nästan helt slutet. Ögat öppnas av det ortonormala filtret, vilket visas i Figur 4.7b. Efter den rekursiva utjämnaren får det binära ögat utseendet i Figur 4.7c.

Mottagarfiltrets brusegenskaper testades genom att vi adderade vitt, normalfördelat brus till kanalen och mätte felsannolikheten. Kurva på felsannolikheten som funktion av signal-brusförhållandet återfinnes i Figur 4.8. Datamodemet innehåller en 10-parametrig manuell utjämnare. Felsannolikheten mättes då denna var optimalt justerad och infördes i Figur 4.8. I denna figur finns också mätpunkter på felsannolikheten utan utjämnning. Som synes ger det automatiska mottagarfiltret en förbättring i förhållande till den manuella.

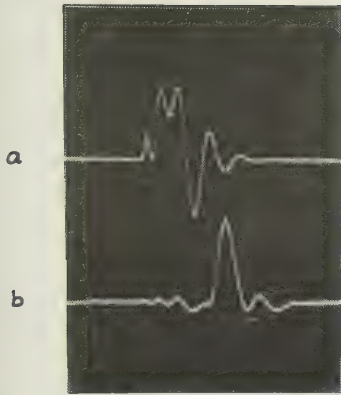
I kapitel 2 påpekades det att om intersymbolinterferensen och bruset var stora, kan man vid adaptiv inställning få en avvikelse på ortonormala filtrets koefficienter i förhållande till de ideala. Vi har därför gjort mätningar på hur koefficienterna varierar med bruset. I Figur 4.9 kan vi se hur den största och den minsta koefficientens avvikelse från det optimala värdet varierar med signal-brusförhållandet. Mätningarna är gjorda på kanalen, vars impulssvar visades i Figur 4.2. Denna kanal fordrar tydligen ett signal-brusförhållande som är större

än c:a 5dB för att filtret ej skall divergera.

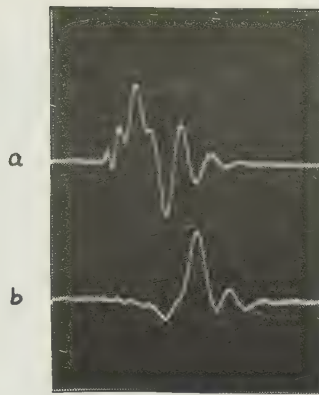
Liknande effekter kan studeras för den rekursiva utjämnaren. I Figur 4.10 har vi plottat maxdistorsionen på utjämnarens utgång som funktion av signal-brusförhållandet då adaptiv inställning användes, och då insignalen var en signal, som hade en maxdistorsion på c:a 50%. Vi ser att om bruset är stort kommer inställningen att divergera. Figur 4.11 slutligen visar motsvarande kurva då testpulsinställning användes. Denna inställningsmetod fordrar tydligen ett mycket högre signal-brusförhållande än den adaptiva. Anledningen till detta är att brusets inverkan vid den adaptiva inställningen reduceras vid medelvärdesbildningen.



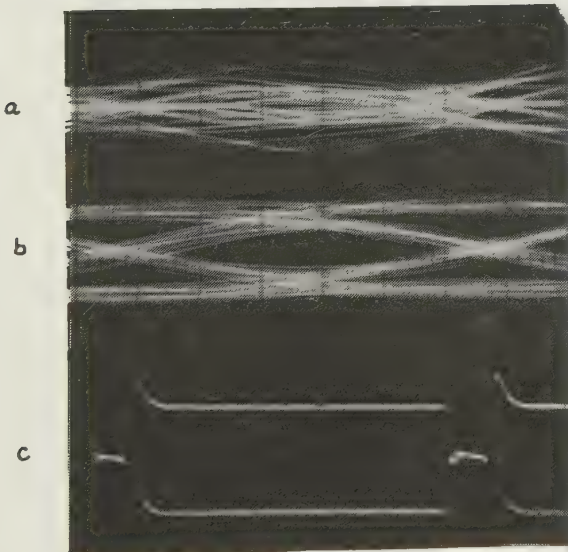
Figur 4.1 Grupplöptidskarakteristik för basbandskanalerna.



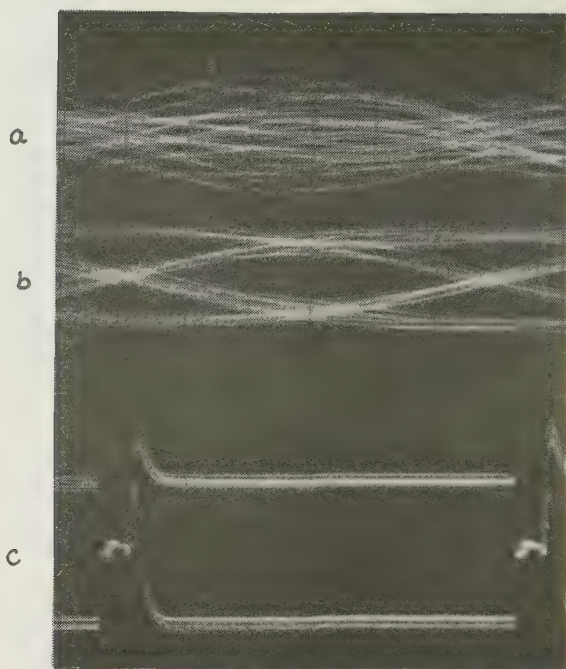
Figur 4.2 Testpulsinställning av ortonormala filtret, Kanal 1. a) insignal
b) utsignal



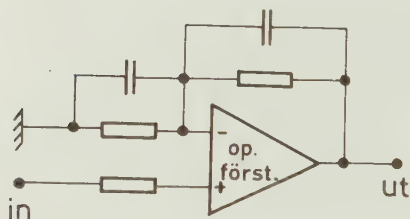
Figur 4.3 Testpulsinställning av ortonormala filtret, Kanal 2. a) insignal
b) utsignal



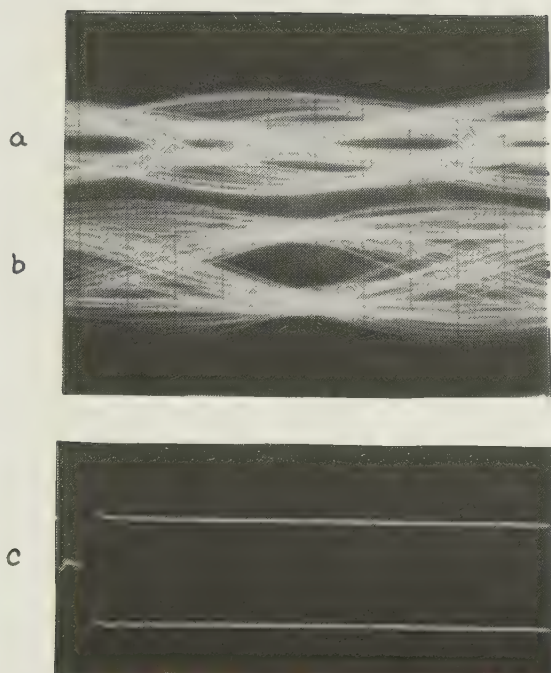
Figur 4.4 Ögondiagram vid adaptiv inställning, Kanal 1.
a) före ortonormala filtret
b) efter ortonormala filtret
c) efter utjämnaren



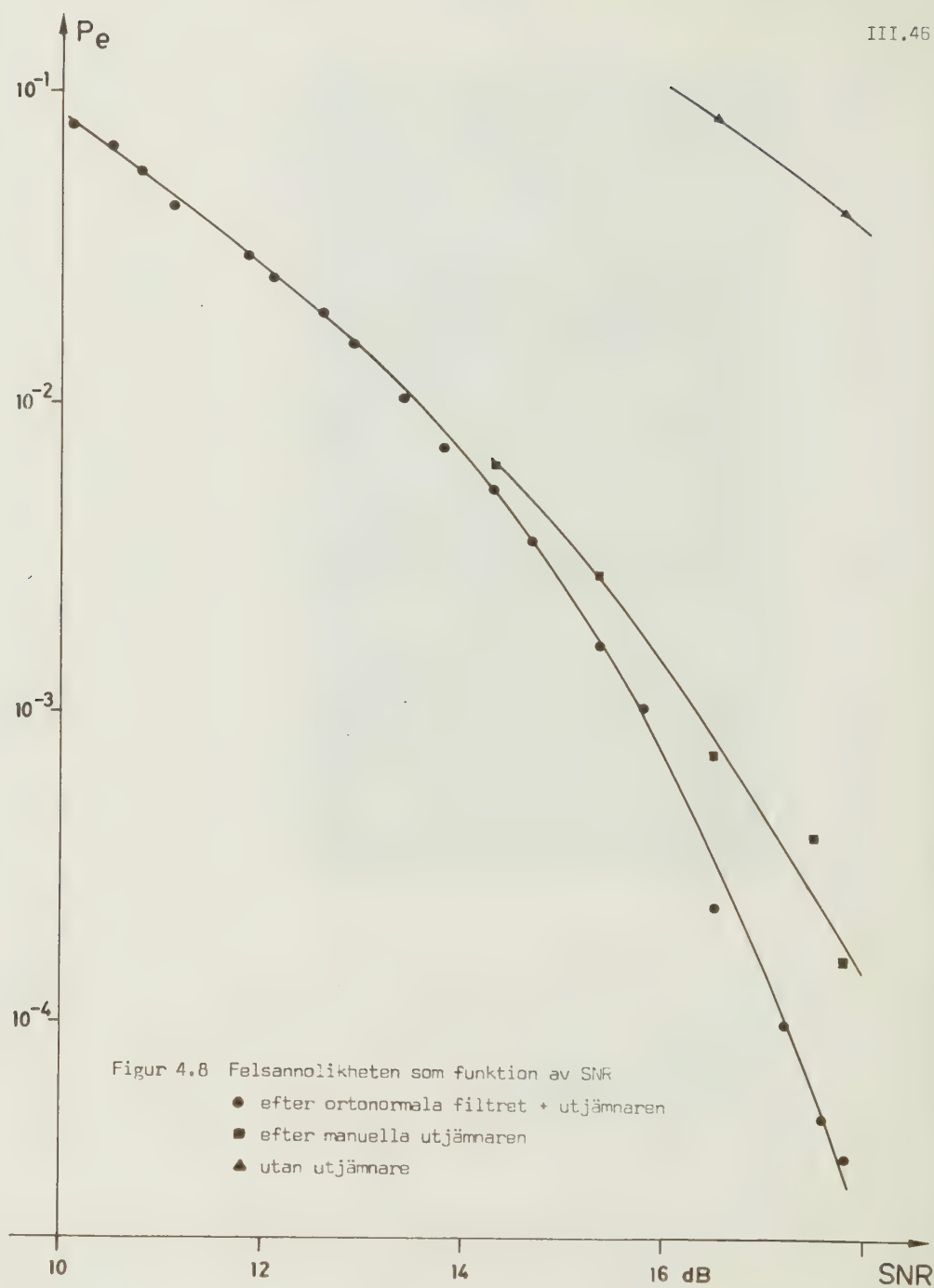
Figur 4.5 Ögonogram vid adaptiv inställning, Kanal 2.
 a) före ortonormala filtret
 b) efter ortonormala filtret
 c) efter utjämnaren

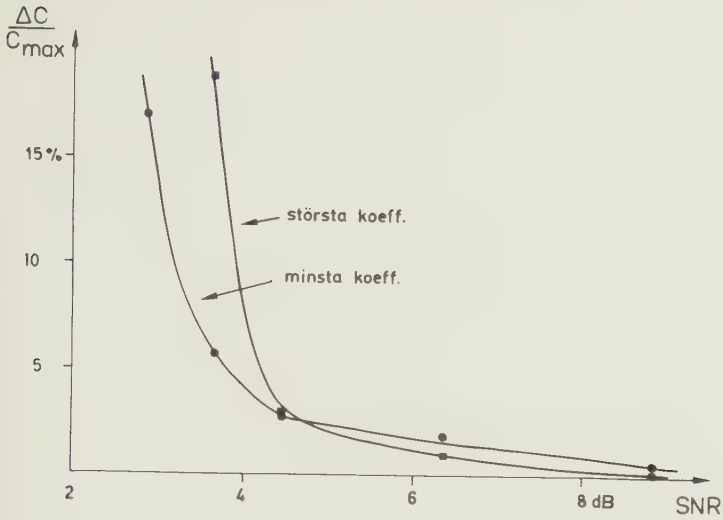


Figur 4.6 Korrektionsfilter.

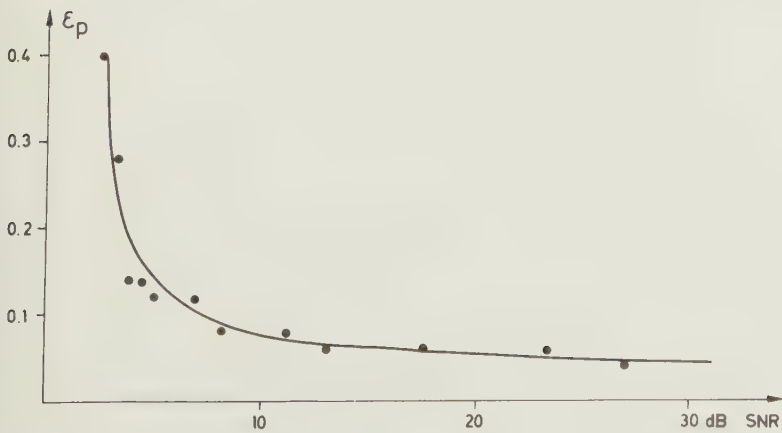


Figur 4.7 Ögonogram vid adaptiv inställning, telefonledning + modem.
a) efter modemet
b) efter ortonormala filtret
c) efter utjämnaren

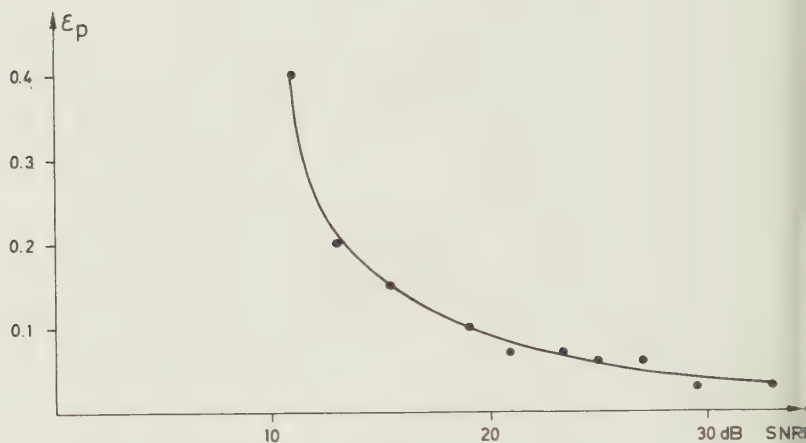




Figur 4.9 Felet i ortonormala filtrets koefficienter som funktion av SNR.



Figur 4.10 Resterande maxdistorsion efter utjämnaren som funktion av SNR, adaptiv inställning.



Figur 4.11 Resterande maxdistorsion efter utjämningen som funktion av SNR, testpulsinställning.

Författarna vill avslutningsvis framföra sitt tack till Magnus Ankarstrand och Claes Örström, som påbörjade uppbyggnaden av periodiska filtret samt till Hans Gieritz och Johan Norberg som slutförde arbetet. Hans Gieritz har därutöver medverkat vid uppbyggnaden av det ortonormala filtret samt vid mätningar på systemet. Bertil Wide, Televerket, tackas för det intresse han har visat konstruktionen genom att hjälpa till vid anskaffandet av nödvändig utrustning.

Appendix A.

Beräkning av variansen av SNR.

Signal-brusförhållandets varians beräknar vi som

$$\begin{aligned}
 V\{\text{SNR}\} &= E\{\text{SNR}^2\} - E\{\text{SNR}\}^2 \approx \\
 &= \left(\frac{E_x}{R_0}\right)^2 \left[E\left\{1 + \frac{E_e^2}{E_x^2} + \frac{1}{E_x^4} \left(\sum_k c_k e_k\right)^4 - 2 \frac{E_e}{E_x} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2}{E_x^2} \left(\sum_k c_k e_k\right)^2 - \frac{2E_e}{E_x} \left(\sum_k c_k e_k\right)^2 \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - 1 + 2 \frac{\sigma_e^2}{E_x^2} (N-1) - (N-1)^2 \frac{\sigma_e^4}{E_x^2} \right] \quad (\text{A.1})
 \end{aligned}$$

I sista ledet har vi använt ekvationerna (2.31) och (2.33). Vid beräkning av medelvärdet av de olika termerna i (A.1), använder vi den kända formeln för fyra normalfördelade variabler med medelvärde noll

$$\begin{aligned}
 E\{x_1 x_2 x_3 x_4\} &= E\{x_1 x_2\} E\{x_3 x_4\} + E\{x_1 x_3\} E\{x_2 x_4\} + \\
 &\quad + E\{x_1 x_4\} E\{x_2 x_3\} \quad (\text{A.2})
 \end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{aligned}
 E\{E_e^2\} &= \sum_k \sum_l E\{e_k^2 e_l^2\} = \\
 &= \sum_k \sum_l E\{e_k^2\} E\{e_l^2\} + 2E\{e_k e_l\}^2 =
 \end{aligned}$$

$$= (N^2 + 2N) \sigma_e^4 \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} E\left\{\left(\sum_k c_k e_k\right)^4\right\} &= \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n c_k c_l c_m c_n E\{e_k e_l e_m e_n\} = \\ &= 3 \sum_k \sum_l c_k^2 c_l^2 \sigma_e^4 = 3 E_x^2 \sigma_e^4 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

och

$$\begin{aligned} E\{E_e(\sum_k c_k e_k)^2\} &= \sum_k \sum_l \sum_m c_k c_l E\{e_k e_l e_m^2\} = \\ &= \sum_k \sum_m c_k^2 \sigma_e^4 + 2 \sum_k c_k^2 \sigma_e^4 = \\ &= (N + 2) E_x \sigma_e^4 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Insättning av (A.3)-(A.5) samt (2.27) och (2.32) i (A.1) ger oss variansen

$$V\{\text{SNR}\} = \left(\frac{E_x}{R_0}\right)^2 \frac{\sigma_e^4}{E_x^2} 2(N-1) \quad (\text{A.6})$$

Appendix B.

Bestämning av övre gräns till P.

Vi antar att värdet på maxdistorsionen

$$\epsilon_p = \frac{1}{y(T)} \sum_{\rho \neq \mu} |y[(\mu - \rho)T_0 + T]| \quad (B.1)$$

är givet. Vidare antar vi att $y[(\mu - \rho)T_0 + T]$ förutom för $\rho = \nu$ och $\rho = \mu$ är skild från noll för M olika värden på ρ . Motsvarande datasekvens $\{\gamma_\rho\}_{\rho=1}^M$ kan i det binära fallet väljas på $L = 2^M$ olika sätt, alla lika sannolika. Varje sekvens ger distorsionsbidraget δ_ℓ , och $\gamma_\nu = 1$ medför distorsionen ϵ_ν .

Det gäller alltså

$$|\epsilon_\nu + \delta_\ell| \leq \epsilon_p \quad (B.2)$$

Eftersom γ_ν och γ_μ är oberoende för $\nu \neq \mu$ och $P\{\gamma_\mu = 1\} = P\{\gamma_\mu = -1\}$, kan vi skriva (2.44)

$$\begin{aligned} P_{\nu\mu} &= P\{\beta_\mu = 1 \mid \gamma_\nu = 1\} = \\ &= \frac{1}{2} P\{\beta_\mu = 1 \mid \gamma_\nu = 1, \gamma_\mu = 1\} + \frac{1}{2} P\{\beta_\mu = 1 \mid \gamma_\nu = 1, \gamma_\mu = -1\} = \\ &= \frac{1}{2} [P_1 + P_2] \end{aligned} \quad (B.3)$$

Bruset n på filtrets utgång förutsättes normalfördelat med medelvärde noll och varians σ^2 . Inför vi signal-brusförhållandet

$$\xi^2 = \frac{y(T)^2}{\sigma^2} \quad (\text{B.4})$$

får P_1 utseendet

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L P\{n > -(1 + \epsilon_v + \delta_\ell) y(T)\} = \\ &= \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \Phi[(1 + \epsilon_v + \delta_\ell)\xi] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

där vi infört

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{B.6})$$

På samma sätt får vi

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L P\{n > -(1 + \epsilon_v + \delta_\ell) y(T)\} = \\ &= \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L 1 - \Phi[(1 - \epsilon_v - \delta_\ell)\xi] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

(B.3), (B.5) och (B.7) ger oss

$$2p_{\mu\mu} - 1 = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \Phi[(1 + \epsilon_v + \delta_\ell)\xi] - \Phi[(1 - \epsilon_v - \delta_\ell)\xi] \quad (\text{B.8})$$

$p_{\mu\mu}$ beräknar vi ur

$$\begin{aligned} p_{\mu\mu} &= \frac{1}{2} P\{\beta_\mu = 1 \mid \gamma_\mu = 1, \gamma_v = 1\} + \frac{1}{2} P\{\beta_\mu = 1 \mid \gamma_\mu = 1, \gamma_v = -1\} \\ &= \frac{1}{2} [P_1 + P_3] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

där P_1 är beräknad i (B.5). Eftersom sekvensen, som medför distorsionsbidraget δ_ℓ , har en dual sekvens, som medför distorsionsbidraget $-\delta_\ell$, kan vi ersätta δ_ℓ med $-\delta_\ell$ och får då

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L P\{n > (1 - \epsilon_v - \delta_\ell)y(T)\} = \\ &= \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \Phi[(1 - \epsilon_v - \delta_\ell)\xi] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Ur (B.5), (B.9) och (B.10) får vi

$$2p_{\mu\mu} - 1 = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \{\Phi[(1 + \epsilon_v + \delta_\ell)\xi] + \Phi[(1 - \epsilon_v - \delta_\ell)\xi]\} - 1 \quad (\text{B.11})$$

(B.8) och (B.11) ger

$$P = \frac{|2p_{\nu\mu} - 1|}{2p_{\mu\mu} - 1} = \frac{\frac{1}{L} \left| \sum_{\ell=1}^L \{\Phi[(1 + \epsilon_v + \delta_\ell)\xi] - \Phi[(1 - \epsilon_v - \delta_\ell)\xi]\} \right|}{\frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \{\Phi[(1 + \epsilon_v + \delta_\ell)\xi] + \Phi[(1 - \epsilon_v - \delta_\ell)\xi]\} - 1} \quad (\text{B.12})$$

Av (B.2) och av Φ -funktionens utseende (B.6) fås relationerna

$$\begin{aligned} \Phi[(1 + \epsilon_p)\xi] - \Phi[(1 - \epsilon_p)\xi] &\geq \\ &\geq \Phi[(1 + \epsilon_v + \delta_\ell)\xi] - \Phi[(1 - \epsilon_v - \delta_\ell)\xi] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

och

$$\begin{aligned}
 & \Phi[(1 + \epsilon_p)\xi] + \Phi[(1 - \epsilon_p)\xi] \leq \\
 & \leq \Phi[(1 + \epsilon_v + \delta_\ell)\xi] + \Phi[(1 - \epsilon_v - \delta_\ell)\xi]
 \end{aligned}
 \tag{B.14}$$

Införes relationerna (B.13) och (B.14) i (B.12) får vi resultatet

$$P \leq \frac{\Phi[(1 + \epsilon_p)\xi] - \Phi[(1 - \epsilon_p)\xi]}{\Phi[(1 + \epsilon_p)\xi] + \Phi[(1 - \epsilon_p)\xi] - 1}
 \tag{B.15}$$

Likhet i (B.15) svarar mot att all distorsion ϵ_p är samlad på en enda term i (B.1).

Referenser

- [1] Lucky, R.W.
"Automatic Equalization for Digital Communication".
Bell System Tech. J., 44 (1965):4, pp 547 - 566

- [2] Lucky, R.W.
"Techniques for Adaptive Equalization of Digital Communication System".
Bell System Tech. J., 45 (1966):2, pp 255 - 286

- [3] Lytle, D.W.
"Convergence Criteria for Transversal Equalizers".
Bell System Tech. J., 47 (1968):8, pp 1775 - 1800

- [4] Hirsch, D. and Wolf, W.J.
"A simple Equalizer for Efficient Data Transmission".
IEEE Trans. on Commun. Technol., COM-18 (1970):1, pp 5 - 11

- [5] Salomonsson, G.
"Utjämning av Datakanaler med Rekursivt Filter".
The Lund Institute of Technology, Telecommunication Theory
Technical Report IR-19, 1971

- [6] Salomonsson, G.
"An Equalizer with Feedback Filter"
Ericsson Techn. 28 (1972):2, pp 57 - 101

- [7] Svensson, T.
 "An Adaptive Matched Filter".
 Ericsson Techn. 27 (1971):3, pp 113 - 136

- [8] Ericson, T.
 "Structure of Optimum Receiving Filters in Data Transmission Systems".
 IEEE Trans. on Inform. Theory, IT-17 (1971):3, pp 352 - 353

- [9] Svensson, T.
 "An Approximation Method for Time Domain Synthesis of Linear Networks".
 IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-20 (1973):2

- [10] Möhmann, K.H. und Holmes, W.H.
 "Ein Wechselstromgekoppeltes Analogwert-Schiebe register".

- [11] Lucky, R.W., Salz, J., & Weldon, E.J.
 "Principles of Data Communication".
 New York 1968

- [12] Freeman, H.
 "Discrete-Time Systems".
 New York 1965

- [13] Standard Radio & Telefon AB
 "Modem Equipment 6H-2005, 1800-9600 Bits/sec".
 (Preliminary Handbook), 1971

- [14] Codex Corporation
 "Specification Sheet AE-96 High Speed Data Modem"
 1969

